Aufgabe 18.46

Betrachtet werden die Funktionen $f_1(x,y)=2(x^2+y^2)$ und $f_2(x,y)=\frac{17}{8}-\frac{1}{8}(x^2+y^2)$.

a) In welcher Kurve schneiden sich die beiden Paraboloide?

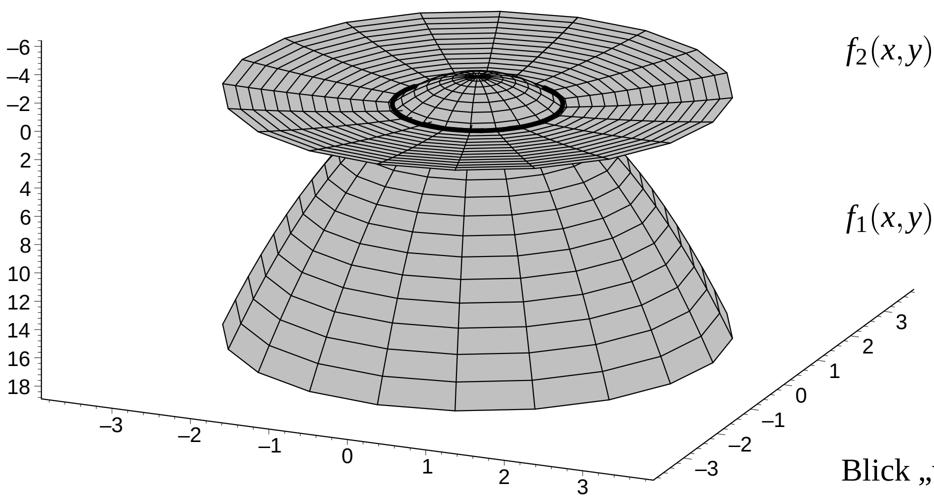
b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an die beiden Paraboloide im Punkt $(1,0,2)$! Zeigen Sie, dass die Stellungsvektoren dieser Tangentialebenen zueinander orthogonal sind!

(nach Luderer, B.; Paape, C. u. Würker, U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. 5. Aufl. Teubner 2008, Beispiel 7.7, S. 202f.)

Lösung:

a) $2(x^2+y^2)=\frac{17}{8}-\frac{1}{8}(x^2+y^2),\ \ \frac{17}{8}(x^2+y^2)=\frac{17}{8},\ \ x^2+y^2=1$

$f_1(x,y)=f_2(x,y)$ gilt also für alle Punkte des Einheitskreises $x^2+y^2=1$, dabei ist $f_1(x,y)=f_2(x,y)=2$. Also schneiden sich die beiden Paraboloide in dem in der Ebene $z=2$ gelegenen Ebene gelegenen Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0,0,2)$.



$f_2(x,y)=\frac{17}{8}-\frac{1}{8}(x^2+y^2)$

$f_1(x,y)=2\,(x^2+y^2)$

Blick „von unten“

b) Es gilt $f_1(1,0)=f_2(1,0)=2$, also liegt der Pnkt $(1,0,2)$ tatsächlich auf beiden Paraboloiden.

Taylorentwicklung für Funktionen einer Veränderl.: $\underbrace{f(x)}_{\text{Kurve}}=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Gerade}\\ \text{Approx. von } f(x)\\ \text{durch Tangente in } x_0}}+R_1(x)$

Für zwei Veränderliche: $\underbrace{f(x,y)}_{\text{Fläche}}=\underbrace{f(x_0)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\mathrm{d}f(x-x_0,y-y_0)\ (\text{da } x-x_0=\Delta x \text{ usw.})}}_{\substack{\text{Ebene}\\ \text{Approx. von } f(x,y)\\ \text{durch Tangentialebene in } (x_0,y_0)}}+R_1(x,y)$

$f_1(x,y)=2(x^2+y^2),\ \ \frac{\partial f_1}{\partial x}=4x,\ \ \frac{\partial f_1}{\partial y}=4y$

Tangentialebene in $(1,0,2)$ an $z = f_1(x,y)$: $z = f_1(1,0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,0)(y-0)$,

$$z = 2 + 4(x-1) + 0y,$$

$$\underline{\underline{4x - z = 2}}$$

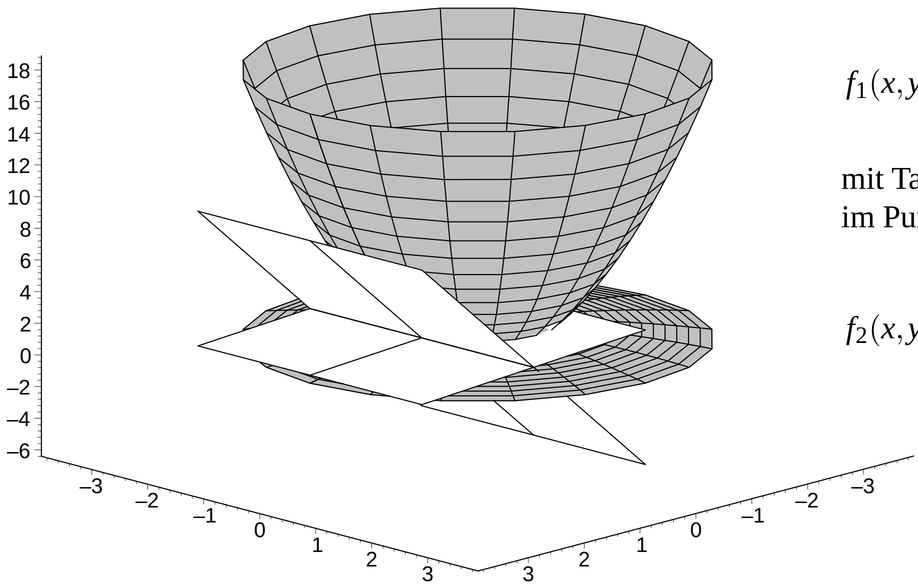
$$f_2(x,y) = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}(x^2+y^2), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{x}{4}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{4}$$

Tangentialebene in $(1,0,2)$ an $z = f_2(x,y)$: $z = f_2(1,0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,0)(y-0)$,

$$z = 2 + \frac{1}{4}(x-1) + 0y,$$

$$\underline{\underline{-x + 4z = 7}}$$

Die Stellungsvektoren der beiden Tangentialebenen sind orthogonal: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$



$f_1(x,y) = 2\,(x^2+y^2)$

mit Tangentialebenen
im Punkt $(1,0,2)$

$f_2(x,y) = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}(x^2+y^2)$