Aufgabe 18.45

Entwickeln Sie $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ für $(x_0,y_0)=(0,0)$ nach der Taylorschen Formel bis zu den Gliedern vierter Ordnung!

Lösung:

$$\nabla f(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{\,3}}\begin{pmatrix}1-y^2 & xy\\ xy & 1-x^2\end{pmatrix}$$

$$f(0,0)=1,\quad \nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}(x\quad y)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\ldots=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ldots$$

Die Berechnung der nächsten beiden Terme wird schwierig. Allerdings hängt die betrachtete Funktion nur von x^2 und y^2 ab, deshalb enthält die Taylorentwicklung auch kein lineares Glied. Es empfiehlt sich, $t=x^2$, $u=y^2$ zu substituieren. Für $g(t,u)=\sqrt{1-t-u}$ erhält man:

$$\nabla g(t,u)=-\frac{1}{2\sqrt{1-t-u}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(t,u)=-\frac{1}{4\sqrt{1-t-u}^{\,3}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$g(0,0)=1,\quad \nabla g(0,0)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(0,0)=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}g(t,u)&=1-\frac{1}{2}(t\quad u)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2!\cdot 4}(t\quad u)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}+\ldots=1-\frac{1}{2}(t+u)-\frac{1}{8}(t\quad u)\begin{pmatrix}t+u\\t+u\end{pmatrix}+\ldots\\&=1-\frac{1}{2}(t+u)-\frac{1}{8}(t+u)^2+\ldots\end{aligned}$$

Nach Rücksubsitution ergibt sich schließlich

$$f(x,y)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2+\ldots=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^2y^2-\frac{1}{8}y^4+\ldots.$$