## Aufgabe 18.44

Sei $f(x,y) = \sqrt{1-x-y}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion $f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ !

b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ an!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $x=t,\ y=t,\ z=\sqrt{1-2t}$ im Punkt $(0,0,1)$ !

d) Zeigen Sie, dass die in c) ermittelte Tangente in der in b) ermittelten Tangentialebene liegt!

## Lösung:

a) $\nabla f(x,y) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x-y}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_f(x,y) = -\dfrac{1}{4\sqrt{1-x-y}^3}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$f(0,0)=1, \quad \nabla f(0,0) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_f(0,0) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= 1 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ &= 1-\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{8}(x^2+2xy+y^2) = 1-\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{8}(x+y)^2 \end{aligned}$$

b) Tangentialebene: $z = P_1(x,y) = 1-\dfrac{1}{2}(x+y)$, d.h. $x+y+2z=2$

c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}t\\t\\\sqrt{1-2t}\end{pmatrix}$, Tangentenrichtung: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1/\sqrt{1-2t}\end{pmatrix}$

Tangente: $\vec{X}(v) = \vec{x}(0) + v\dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

d) $x+y+2z = v+v+2(1-v) = 2$. Somit erfüllt die Gleichung der Tangente die der Tangentialebene. Das musste so sein, da die Kurve aus c) in der Fläche $z = f(x,y)$ liegt. Deshalb muss ihre Tangente in der Tangentialebene an die Fläche liegen.