Aufgabe 18.41

Entwickeln Sie $f(x,y)=x^y$ für $(x_0,y_0)=(1,1)$ nach der Taylorformel bis zu den quadratischen Gliedern und bestimmen Sie damit näherungsweise $1{,}01^{1{,}02}$!

Lösung:

Taylorsche Formel für eine Veränderliche (s. z.B. Aufgabe 12.150 oder 12.151):

$$f(x)=\underbrace{\underbrace{f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{Differenzial}}}_{\text{Gerade: Tangente}}+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{Parabel (Krümmung erfasst)}}+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_k(x,x_0)$$

Für n Veränderliche (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen):

Sei $\mathrm{d}_{\vec v}f=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=v^{\mathsf T}\nabla f$ das **Richtungsdifferenzial** von f in Richtung $\vec v$, das ist der Wert des vollständigen Differenzials (s. z.B. Aufgabe 18.11 oder 18.25) in diese Richtung. Für $\|\vec v\|=1$ handelt es sich beim Richtungsdifferenzial um die Richtungsableitung (s. z.B. Aufgabe 18.36), für $n=1$ um das Differenzial (s. z.B. Aufgabe 12.18 oder 12.20).

Für das Richtungsdifferenzial 2. Ordnung erhält man

$$\mathrm{d}^2_{\vec v}f=\mathrm{d}_{\vec v}(\mathrm{d}_{\vec v}f)=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial(\mathrm{d}_{\vec v}f)}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}v_iv_j=\vec v^{\mathsf T}\boldsymbol{H}_f\,\vec v.$$

Taylorsche Formel für n Veränderliche (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen):

$$f(\vec x)=f(\vec x_0)+\underbrace{\mathrm{d}_{\vec x-\vec x_0}f(\vec x_0)}_{\text{Richtungsdifferenzial}}+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2_{\vec x-\vec x_0}f(\vec x_0)+\cdots+\frac{1}{k!}\mathrm{d}^k_{\vec x-\vec x_0}f(\vec x_0)+R_k(\vec x,\vec x_0)$$

$$=\underbrace{\underbrace{f(\vec x_0)+(\vec x-\vec x_0)^{\mathsf T}\nabla f(\vec x_0)}_{\text{Tangential(hyper)ebene}}+\frac12(\vec x-\vec x_0)^{\mathsf T}\boldsymbol{H}_f(\vec x_0)(\vec x-\vec x_0)}_{\text{(Hyper)Fläche 2. Ordnung (Paraboloid)}}+\ldots$$

Für die in der Aufgabenstellung gegebene Funktion $f(xy)=x^y$ ergibt sich

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}yx^{y-1}\\ x^y\ln x\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\\ yx^{y-1}\ln x+x^{y-1} & x^y(\ln x)^2\end{pmatrix},$$

$$f(1,1)=1,\quad \nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(1,1)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$x^y\approx 1+(x-1\ \ y-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac12(x-1\ \ y-1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}=1+x-1+\frac12(x-1\ \ y-1)\begin{pmatrix}y-1\\x-1\end{pmatrix}$$
$$=x+(x-1)(y-1)=xy-y+1.$$

$1{,}01^{1{,}02}\approx 1{,}01\cdot 1{,}02-1{,}02+1=1{,}0102,\quad$ exakt gilt $1{,}01^{1{,}02}\approx 1{,}01020101668.$