Aufgabe 18.40

Gegeben sei die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)=2^{x_1}e^{x_2}3^{x_3}$.

a) Entwickeln Sie die $f(x_1,x_2,x_3)$ an der Stelle $(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})$ nach der Taylorformel bis zu den linearen Gliedern!

b) Ein Produktionsergebnis hänge durch die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)$ von den Faktoren x_1, x_2 und x_3 ab. Ermitteln Sie näherungsweise die relative Zunahme des Produktionsergebnisses, die die Vergrößerung des Faktors x_i $(i=1,2,3)$ um ein Prozent ausgehend von $(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})=(2,1,1)$ mit sich bringt!

Lösung:

a) **Taylorsche Formel für eine Veränderliche** (s. z.B. Aufgabe 12.150 oder 12.151):

$$f(x)=\underbrace{\underbrace{f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{Differenzial}}}_{\text{Gerade: Tangente}}+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{Parabel (Krümmung erfasst)}}+\dots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_k(x,x_0)$$

Für n Veränderliche (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen):

Sei $d_{\vec v}f=\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=v^{\mathsf T}\nabla f$ das **Richtungsdifferenzial** von f in Richtung $\vec v$, das ist der Wert des vollständigen Differenzials (s. z.B. Aufgabe 18.11 oder 18.25) in diese Richtung. Für $\|\vec v\|=1$ handelt es sich beim Richtungsdifferenzial um die Richtungsableitung (s. z.B. Aufgabe 18.36), für $n=1$ um das Differenzial (s. z.B. Aufgabe 12.18 oder 12.20).

Für das Richtungsdifferenzial 2. Ordnung erhält man

$$d^2_{\vec v}f=d_{\vec v}(d_{\vec v}f)=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial(d_{\vec v}f)}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}v_iv_j=\vec v^{\mathsf T}\boldsymbol{H}_f\vec v.$$

Taylorsche Formel für n Veränderliche (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen):

$$\begin{aligned}f(\vec x)&=f(\vec x_0)+\underbrace{d_{\vec x-\vec x_0}f(\vec x_0)}_{\text{Richtungsdifferenzial}}+\frac{1}{2!}d^2_{\vec x-\vec x_0}f(\vec x_0)+\dots+\frac{1}{k!}d^k_{\vec x-\vec x_0}f(\vec x_0)+R_k(\vec x,\vec x_0)\\&=\underbrace{\underbrace{f(\vec x_0)+(\vec x-\vec x_0)^{\mathsf T}\nabla f(\vec x_0)}_{\text{Tangential(hyper)ebene}}+\frac{1}{2}(\vec x-\vec x_0)^{\mathsf T}\boldsymbol{H}_f(\vec x_0)(\vec x-\vec x_0)}_{\text{(Hyper)Fläche 2. Ordnung (Paraboloid)}}+\dots\end{aligned}$$

Für die in der Aufgabenstellung gegebene Funktion $f(x_1,x_2,x_3)=2^{x_1}e^{x_2}3^{x_3}$ ergibt sich

$$\nabla f=\begin{pmatrix}2^{x_1}\ln 2e^{x_2}3^{x_3}\\2^{x_1}e^{x_2}3^{x_3}\\2^{x_1}e^{x_2}3^{x_3}\ln 3\end{pmatrix}=f(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\ln 2\\1\\\ln 3\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&\approx f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})+f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})\begin{pmatrix}\ln 2\\1\\\ln 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1-\overline{x_1}\\x_2-\overline{x_2}\\x_3-\overline{x_3}\end{pmatrix}\\&=f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})+f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})\big(\ln 2(x_1-\overline{x_1})+(x_2-\overline{x_2})+\ln 3(x_3-\overline{x_3})\big).\end{aligned}$$

(Dabei wurde das Richtungsdifferenzial jetzt als Skalarprodukt und deshalb mit dem Spaltenvektor der Richtung geschrieben, während es oben durch Matrizenmultiplikation und deshalb mit dem Zeilenvektor $(\vec{x}-\vec{x}_0)^{\mathsf{T}}$ notiert wurde.)

b) relative Änderung $\dfrac{\Delta f}{f} = \dfrac{f(x_1,x_2,x_3)-f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})}{f(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})} \approx \ln 2(x_1-\overline{x_1})+(x_2-\overline{x_2})+\ln 3(x_3-\overline{x_3})$

$$= \ln 2\,\overline{x_1}\,\underbrace{\frac{x_1-\overline{x_1}}{\overline{x_1}}}_{\text{rel. Änderung von } x_1} + \overline{x_2}\,\frac{x_2-\overline{x_2}}{\overline{x_2}} + \ln 3\,\overline{x_3}\,\frac{x_3-\overline{x_3}}{\overline{x_3}}$$

Ausgehend von $(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})=(2,1,1)$ führt
Vergrößerung von x_1 um 1 % zu Vergrößerung von f um $\ln 2\cdot\overline{x_1}\,\% = 2\ln 2\,\% \approx 1{,}39\,\%$,
Vergrößerung von x_2 um 1 % zu Vergrößerung von f um $\overline{x_2}\,\% = 1\,\%$,
Vergrößerung von x_3 um 1 % zu Vergrößerung von f um $\ln 3\cdot\overline{x_3}\,\% = \ln 3\,\% \approx 1{,}10\,\%$.

Tatsächlich ist $f(2,1,1) = 12\mathrm{e} = 32{,}619382$

$f(2{,}02,\,1,\,1) = 2^{2{,}02}3\,\mathrm{e} = 33{,}074748$, relative Erhöhung 1,40 %,

$f(2,\,1{,}01,\,1) = 12\,\mathrm{e}^{1{,}01} = 32{,}947212$, 1,01 %,

$f(2,\,1,\,1{,}01) = 4\,\mathrm{e}\,3^{1{,}01} = 32{,}979717$, 1,01 %.