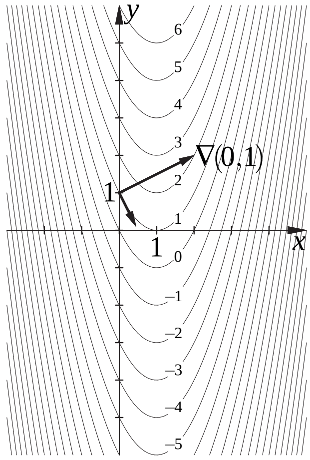
Aufgabe 18.38

Betrachtet wird die Funktion $f(x,y) = y - x^2 + 2x$.

a) Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!
b) Ermitteln Sie für den Punkt $(x,y) = (0,1)$ die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f(x,y)$ sowie die Richtungsableitung in diese Richtung! Zeichnen Sie die Richtung in das Niveaulinienbild ein!
c) In welche Richtung ist die Richtungsableitung im Punkt $(x,y) = (0,1)$ gleich 0? Zeichnen Sie auch diese Richtung in das Bild ein!
d) Welche Beziehung besteht zwischen der Niveaulinie durch den Punkt $(x,y) = (0,1)$ und der Gerade mit der bei c) ermittelten Richtung durch diesen Punkt?

Lösung:



a) $f(x,y) = y - x^2 + 2x = C, \quad y - (x-1)^2 + 1 = C$

Niveaulinien sind also alle Parabeln $y = (x-1)^2 + C - 1$ mit beliebigem reellen C.

Die Scheitelpunkte aller Niveaulinien liegen auf der Gerade $x = 1$.

b) Richtung des steilsten Anstiegs: Gradientenrichtung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f \cdot \nabla f = \|\nabla f\|, \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial \nabla f(0,1)} = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

c) $\dfrac{\partial f(0,1)}{\partial \vec{v}} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla f(0,1) = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{2v_1 + v_2}{\|\vec{v}\|} = 0$ für die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
(oder Vielfache davon, oben eingezeichnet ist ein normierter Vektor).

d) Bei der Gerade handelt es sich um die Tangente an die Niveaulinie.