Aufgabe 18.37

Ein Temperaturfeld sei durch $T(x,y,z) = 2x^2 - 3yz + 4$ gegeben.

a) In welche Richtung ändert sich die Temperatur ausgehend vom Punkt $(2,0,2)$ am stärksten?
b) Wie groß ist ausgehend von diesem Punkt der maximale Temperaturanstieg pro Längeneinheit?
c) Wie groß ist die tatsächliche Temperaturänderung, wenn von dem Punkt ausgehend ein Zwanzigstel bzw. eine volle Längeneinheit in Richtung des maximalen Temperaturanstiegs zurückgelegt wird?

Lösung:

Eine (skalarwertige) Funktion mehrerer Veränderlicher wird als skalarwertige Funktion eines Vektors auch als **Skalarfeld** bezeichnet.

a) Stärkster Anstieg in Richtung des Gradienten ∇T, stärkster Fall in Richtung $-\nabla T$.

$$\nabla T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ -3z \\ -3y \end{pmatrix}, \quad \nabla T(2,0,2) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also stärkster Anstieg in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, stärkster Fall in Richtung $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) In Richtung $\vec{l} = \nabla T$ gilt $\dfrac{\Delta T}{\|\Delta\vec{x}\|} \approx \dfrac{\partial T}{\partial \nabla T} = \nabla T \cdot \dfrac{\nabla T}{\|\nabla T\|} = \dfrac{\nabla T \cdot \nabla T}{\|\nabla T\|} = \dfrac{\|\nabla T\|^2}{\|\nabla T\|} = \|\nabla T\|.$

(Man kann sich das auch mit $\dfrac{\partial T}{\partial l} = \nabla T \cdot \vec{l}_n = \|\nabla T\| \cos\sphericalangle(\nabla T, \vec{l})$ mit $\vec{l} = \nabla T$ überlegen.)

In Richtung $\vec{l} = \nabla T = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\dfrac{\Delta T}{\|\Delta\vec{x}\|} \approx \dfrac{\partial T}{\partial \nabla T} = \dfrac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{100}{10} = 10.$)

Für $\|\Delta\vec{x}\| = 1$ ergibt sich $\Delta T \approx \|\nabla T\| = \left\|\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 10$, der maximale Temperaturanstieg (also der Temperaturanstieg in Gradientenrichtung) beträgt somit 10 Temperatureinheiten pro Längeneinheit.

c) $\nabla T = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, 1 LE: $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{20}$ LE: $\dfrac{1}{200}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ -0.03 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(2,0,2) = 12$

$\dfrac{1}{20}$ LE in Ri. max. Anstiegs: $T(2.04,-0.03,2) = 12.5032$, $\underline{\underline{\Delta T = 0.5032}}$, $\mathrm{d}T = \dfrac{1}{20}10 = 0.5$

1 LE in Richtung max. Anstiegs: $T(2.8,-0.6,2) = 23.28$, $\underline{\underline{\Delta T = 11.28}}$, $\mathrm{d}T = 10$