Aufgabe 18.36

Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ die partiellen Ableitungen sowie die Ableitung in Richtung der Geraden $y=x$ im Koordinatenursprung!

Lösung:

Da die Funktion längs der Koordinatenachsen konstant gleich 0 ist, sind die partiellen Ableitungen im Koordinatenursprung gleich 0: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Die Richtung der Gerade $y=x$ ist $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, normiert $\vec{v}_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Nach der Formel für die Berechnung der Richtungsableitung wäre $\frac{\partial f(0,0)}{\partial\vec{v}}=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}_n=\vec{0}\cdot\vec{v}_n=0$.

Das ist wenig glaubhaft, denn für $y=x$ gilt $f(x,y)=f(x,x)=\frac{x^3}{2x^2}=\frac{x}{2}$, der rechtsstehende Ausdruck trifft wegen der speziellen Definition auch im Koordinatenursprung zu.

Tatsächlich gilt $\frac{\partial f(0,0)}{\partial\vec{v}}=\lim\limits_{\Delta\vec{x}\to 0}\frac{\Delta f}{\|\Delta\vec{x}\|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,x)-f(0,0)}{\left\|\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x/2}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Die Richtungsableitung kann auch nach folgender Formel berechnet werden:

$$\frac{\partial f(\vec{0})}{\partial\vec{v}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{0}+h\vec{v}_n)-f(\vec{0})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h,\frac{1}{\sqrt{2}}h\right)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}h^3}{h^2}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Für die Existenz und Berechnung der Richtungsableitungen gilt folgender
Satz: Ist die Funktion f im Punkt $\vec{x}$ total differenzierbar, dann existieren alle Richtungsableitungen und es gilt $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{v}}=\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{v}_n=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{v}$.

Also kann die Funktion $f(x,y)$ im Koordinatenursprung nicht total differenzierbar sein.

(Die hinreichende Differenzierbarkeitsvoraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist hier verletzt. Es gilt nämlich $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^3}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, beide partiellen Ableitungen sind im Koordinatenursprung unstetig. Daraus folgt allerdings noch nicht die Nichtdifferenzierbarkeit. Letztere folgt aber wie gesagt aus der Ungültigkeit der Formel aus dem angegebenen Satz.)