Aufgabe 18.30

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!
b) Ermitteln Sie im Punkt $(x,y)=(2,2)$ die Richtungsableitung in Richtung der Winkelhalbierenden des I. Quadranten!
c) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an $z=f(x,y)$ im Punkt $(x,y,z)=(2,0,2)$?

Lösung:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+x\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x\,\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=\frac{y^2}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=-\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=-\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$$

b) $\nabla f(2,2)=\begin{pmatrix}\left(1-\frac{2}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{2}{2}}\\ \mathrm{e}^{\frac{2}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}\end{pmatrix}$

Richtung der Winkelhalbierenden des I. Quadranten ist $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, normierter Richtungsvektor somit $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Richtungsableitung: $\dfrac{\partial f(2,2)}{\partial\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\nabla f(2,2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}\approx 1{,}92}}$

c) $f(2,0)=2,$ d.h. $(2,0,2)$ liegt tatsächlich auf der Fläche, $\quad\nabla f(2,0)=\begin{pmatrix}\left(1-\frac{0}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{0}{2}}\\ \mathrm{e}^{\frac{0}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Tangentialebene: $z=f(2,0)+\nabla f(2,0)\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y-0\end{pmatrix}=2+\begin{pmatrix}1\\1\\ \mathrm{e}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix}=2+x-2+y$

$\underline{\underline{x+y-z=0}}$