Aufgabe 18.28

Eine von den Produktionsfaktoren x_1 bis x_4 abhängige Produktionsfunktion laute
$P(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt[10]{x_1\,x_2^2\,x_3^3\,x_4^4}$.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Cobb-Douglas-Funktion handelt!
b) Ermitteln Sie die partiellen Elastizitäten des Produktionsergebnisses bezüglich der einzelnen Faktoren!
c) Welche prozentuale Erhöhung des Produktionsergebnisses ist zu erwarten, wenn der Faktor x_i $(i=1,\ldots,4)$ um 2,5 % erhöht wird und die anderen Faktoren unverändert bleiben?

Lösung:

a) $P(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^{\frac{1}{10}}\,x_2^{\frac{2}{10}}\,x_3^{\frac{3}{10}}\,x_4^{\frac{4}{10}} = \alpha_0\,x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}\,x_4^{\alpha_4}$
mit $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\frac{1}{10}$, $\alpha_2=\frac{2}{10}$, $\alpha_3=\frac{3}{10}$, $\alpha_4=\frac{4}{10}$ (alle $\alpha_i>0$), $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$.
Also handelt es sich um eine Cobb-Douglas-Funktion.

b) $\varepsilon_{P,x_i} = \dfrac{\partial P}{\partial x_i}\,\dfrac{x_i}{P} = \dfrac{\alpha_i\,x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}\,x_4^{\alpha_4}\,x_i^{-1}}{x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}\,x_4^{\alpha_4}}x_i = \alpha_i$, also $\varepsilon_{P,x_i} = \dfrac{i}{10}$, $i=1,\ldots,4$

c) Erhöht sich der Faktor x_i $(i=1,\ldots,4)$ um 2,5 % und bleiben die anderen Faktoren unverändert, so erhöht sich das Produktionsergebnis P um $\varepsilon_{P,x_i}\cdot 2{,}5\,\% = \frac{i}{10}\cdot 2{,}5\,\%$,
d.h. eine Erhöhung von x_1 um $2{,}5\,\%$ führt zu einer Erhöhung von P um $0{,}25\,\%$,
eine Erhöhung von x_2 um $2{,}5\,\%$ führt zu einer Erhöhung von P um $0{,}5\,\%$,
eine Erhöhung von x_3 um $2{,}5\,\%$ führt zu einer Erhöhung von P um $0{,}75\,\%$ und
eine Erhöhung von x_4 um $2{,}5\,\%$ führt zu einer Erhöhung von P um $1\,\%$.