Aufgabe 18.27

Für die Herstellung eines Produktes werden Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt, deren Preise mit p_1, p_2 und p_3 bezeichnet werden. Der Gewinn pro verkaufter Mengeneinheit des Produkts betrage $G(p_1, p_2, p_3) = 800 - 3p_1 - 2p_2 - 5p_3$. Es sei $p_2 = 50$ und $p_3 = 20$. Für welche Preise p_1 ist der Gewinn positiv und im Verhältnis zu p_1 elastisch?

Hinweis: Die **partielle Elastizität** wird analog der gewöhnlichen Elastizität eingeführt: Das Verhältnis der relativen Änderungen der Größen $f(x_1, \ldots, x_n)$ und x_i beträgt ungefähr $\varepsilon_{f,x_i} = \frac{\partial f/\partial x_i}{f} x_i$, wenn die Größen x_j, $j \neq i$ unverändert bleiben.

Lösung:

$G(p_1, 50, 20) = 800 - 3p_1 - 2 \cdot 50 - 5 \cdot 20 = 600 - 3p_1 > 0, \implies 3p_1 < 600, \quad p_1 < 200$

Die Elastizität von g bezüglich p_1 wird analog zur gewöhnlichen Elastizität (s. z.B. Aufgabe 12.90) berechnet, wobei als Ableitung jetzt die partielle Ableitung nach p_1 zu verwenden ist, da ja die anderen Variablen p_2 und p_3 fixiert sind.

$$\varepsilon_{G,p_1}(p_1) = \frac{\frac{\partial G}{\partial p}}{G} p_1 = \frac{-3}{800 - 3p_1 - 2p_2 - 5p_3} p_1 = \frac{-3}{600 - 3p_1} = \frac{3p_1}{3p_1 - 600} = \frac{p_1}{p_1 - 200}$$

Elastisch, falls $|\varepsilon_{G,p_1}| > 1$ (prozentuale Änderung des Gewinns größer als prozentuale Änderung des Preises).

$p_1 < 200 \implies \varepsilon_{G,p_1} < 0$ (Gewinn fällt mit setiegndem Rohstoffpreis)

Also muss $\varepsilon_{G,p_1} < -1$ sein: $\frac{p_1}{p_1 - 200} < -1 \implies p_1 < 200 - p_1, \quad p_1 > 100$

Somit ist der Gewinn für $100 < p_1 < 200$ positiv und im Verhältnis zu p_1 elastisch.