Aufgabe 18.25

Sei $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y + 4$.

a) Berechnen Sie das vollständige Differenzial!

b) Wie ändert sich der Funktionswert, wenn ausgehend von $x=y=1$ x um 0.002 zu- und y um 0.001 abnimmt! Ermitteln Sie einen Näherungswert mit Hilfe des vollständigen Differenzials sowie die tatsächliche absolute Änderung!

c) Schätzen Sie mit Hilfe des vollständigen Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x,y)$ ab, der entstehen kann, wenn die Werte $x=1$ und $y=1$ jeweils mit einer Genauigkeit von 0.002 ermittelt worden sind!

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt $(x,y,z) = (1,1,4)$ (Taylorentwicklung bis zu den linearen Gliedern)!

Lösung:

a) **Vollständiges Differenzial:** Änderung von $f(x,y)$ in Abhängigkeit von der Änderung von x (Δx) und der Änderung von y (Δy), die sich ergeben würde, wenn f in x und y linear wäre, d.h., wenn die augenblicklichen Änderungsraten beibehalten würden:

$$\mathrm{d}f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

(vgl. im Eindimensionalen Zusammenhang zwischen Weg und Zeit bei Ortsveränderung: Welcher Weg würde in Abhängigkeit von der Zeit zurückgelegt, wenn die Augenblicksgeschwindigkeit beibehalten würde?)

Betrachtet man x und y als Funktionen von sich selbst, so sieht man, dass $\Delta x = \mathrm{d}x$ und $\Delta y = \mathrm{d}y$ ist. Für kleine Argumentänderungen ist das Differenzial ungefähr gleich der tatsächlichen Funktionswertänderung, also

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Konkret:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 1, \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = (3x^2 - 2y^2)\,\Delta x + (-4xy + 1)\,\Delta y$$

b) $x=y=1$: $\quad \mathrm{d}f = (3\cdot 1 - 2\cdot 1)\,\Delta x + (-4\cdot 1\cdot 1 + 1)\,\Delta y = \Delta x - 3\Delta y$

$\Delta x = 0.002,\ \Delta y = -0.001$: $\quad \mathrm{d}f = 0.002 - 3(-0.001) = 0.005$

$$\left.\begin{array}{ll} f(1,1) & = 4 \\ f(1.002, 0.999) & = 4.005018 \end{array}\right\} \ \Delta f = 0.005018 \approx \mathrm{d}f = 0.005$$

c) $\Delta f \approx \mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \Delta x - 3\Delta y$

Abschätzung mit Dreiecksungleichung $|a \pm b| \le |a| + |b|$ (ungünstigster Fall: alle Fehler addieren sich)

$|\Delta f| \approx |\mathrm{d}f| \le |\Delta x| + 3|\Delta y| \le 1\cdot 0.002 + 3\cdot 0.002 = \underline{\underline{0.008}}$

(z.B. für $\Delta x = 0.002,\ \Delta y = -0.002$: $\Delta f \approx \mathrm{d}f = 0.008$,
$\Delta x = -0.002,\ \Delta y = 0.002$: $\Delta f \approx \mathrm{d}f = -0.008$,
hingegen z.B. $\Delta x = 0.002,\ \Delta y = 0.002$: $\Delta f \approx \mathrm{d}f = -0.004$.)

Allgemein: $|\Delta f| \approx |\mathrm{d}f| \leq \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y|.$

d) Taylorentwicklung für Funktionen einer Veränderl.: $\underbrace{f(x)}_{\text{Kurve}} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Gerade} \\ \text{Approx. von } f(x) \\ \text{durch Tangente in } x_0}} + R_1(x)$

Für zwei Veränderliche: $\underbrace{f(x,y)}_{\text{Fläche}} = \underbrace{f(x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\mathrm{d}f(x-x_0,\,y-y_0)\ (\text{da } x-x_0=\Delta x \text{ usw.})}}_{\substack{\text{Ebene} \\ \text{Approx. von } f(x,y) \\ \text{durch Tangentialebene in } (x_0,y_0)}} + R_1(x,y)$

Konkret also Tangentialebene:
$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1),$$
$$z = 4 + (x-1) - 3(y-1),$$
$$\underline{\underline{-x + 3y + z = 6.}}$$