Aufgabe 18.24

Beseitigen Sie in der partiellen Differenzialgleichung $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=36$ durch Hauptachsentransformation entsprechend Aufgabe 17.15 das gemischte Glied!

Lösung:

$$8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}u=36$$

Wie bei der Hauptachsentransformation für eine Kurve 2. Ordnung in Aufgabe 17.15 wird dabei mit der Aufteilung des Summanden $4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ in $2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ erreicht, dass eine symmetrische Matrix entsteht, für die die Matrix aus den normierten Eigenvektoren $\boldsymbol{V}$ orthogonal ist und entsprechend Aufgaben 17.5 und 17.6 eine Drehung vermittelt. Die dafür zusätzlich erforderliche Eigenschaft $\det\boldsymbol{V}=1$ ist immer erreichbar, ggf. muss einer der normierten Eigenvektoren mit -1 multipliziert werden. Insgesamt gibt es 8 Möglichkeiten zur Aufstellung einer orthogonalen Matrix aus normierten Eigenvektoren zweireihiger symmetrischer Matrizen (Reihenfolge der Eigenwerte sowie jeweils zwei Richtungen für die Eigenvektoren). In 4 Fällen handelt es sich um Drehungen, in den anderen 4 kommt eine Klappung dazu.

Nach Aufgabe 16.27b) ist $\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ und durch die Koordinatentransformation $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$ erfolgt eine Drehung in Hauptachsenlage. Wegen der Orthogonalität von $\boldsymbol{V}$, d.h. $\boldsymbol{V}^{-1}=\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}$, gilt auch $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $\begin{array}{l}\xi=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y),\\ \eta=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x+2y).\end{array}$

Nach der Kettenregel (s. z.B. Aufgabe 18.21) gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{-1}{\sqrt{5}}\quad\text{und}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Somit ist $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Durch Einsetzen in die oben notierte Form der Gleichung erhält man

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{\text{bekannt aus Aufgabe 16.27b)}}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}u=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}u$$

$$=9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=36.$$

Somit handelt es sich um eine elliptische Differenzialgleichung.

Wie bei der Hauptachsentransformation der Ellipse in Aufgabe 17.15 handelt es sich bei der verwendeten Koordinatentransformation wegen $\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ um eine Drehung des Koordiantensystems um den Winkel von $\alpha\approx 26{,}57^\circ$.