Aufgabe 18.14

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:

a) $f(x_1,x_2) = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$,
b) $f(x,y) = \sin(ax+by)$ allgemein und für $(x,y)=(0,0)$,
c) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2 \ln x_3 - x_1^2 x_2 \mathrm{e}^{x_1}$!

Lösung:

Gradient: Spaltenvektor der partiellen Ableitungen $\nabla f = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \cdot\cdot \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$

Hessematrix: Matrix der 2. partiellen Ableitungen

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

a) $$f_{x_1} = \frac{-2x_1}{2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}},$$

$$f_{x_1x_1} = -\frac{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} + x_1 \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}}{1-x_1^2-x_2^2} = -\frac{1-x_2^2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}^{\,3}},$$

$$f_{x_1x_2} = \frac{x_1\left(-\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\right)}{1-x_1^2-x_2^2} = -\frac{x_1x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}^{\,3}},$$

andere Ableitungen analog, also

$$\nabla f = -\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_f = -\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}^{\,3}} \begin{pmatrix} 1-x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1-x_1^2 \end{pmatrix}$$

Falls 2. partielle Ableitungen stetig, so sind die gemischten partiellen Ableitungen gleich: $f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}$ (Satz von Schwarz).

b) $$\nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cos(ax+by), \quad \boldsymbol{H}_f = -\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \sin(ax+by),$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 - (2+x_1)x_1x_2e^{x_1} \\ \ln x_3 - x_1^2 e^{x_1} \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2-(2x_2+4x_1x_2+x_1^2x_2)e^{x_1} & -(2+x_1)x_1e^{x_1} & 0 \\ -(2+x_1)x_1e^{x_1} & 0 & \frac{1}{x_3} \\ 0 & \frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3^2} \end{pmatrix}$$