Aufgabe 18.7

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Wie verhält sich die Funktion, wenn man sich längs einer Geraden dem Koordinatenursprung nähert? Ist sie stetig?

Lösung:

Geraden durch den Koordinatenursprung sind $y = ax$, a beliebig reell und die y-Achse $x = 0$. (Man könnte beliebige Geraden durch den Koordinatenursprung auch in der Form $\vec{x} = t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a^2+b^2 \neq 0$ notieren.)

$$\lim_{x\to 0} f(x,ax) = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{x^2+a^2x^2} = \frac{a}{1+a^2} \begin{cases} \neq f(0,0) = 0, & a \neq 0 \\ = f(0,0) = 0, & a = 0 \end{cases}$$ (aus jeder Geradenrichtung anderer Grenzwert)

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 = f(0,0)$$

Jedenfalls strebt die Funktion $f(x,y)$ nicht bei beliebiger Annäherung an $(0,0)$ gegen denselben Wert, so dass der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert und die Funktion dort erst recht nicht stetig ist. (Nur längs der Koordinatenachsen strebt $f(x,y)$ bei Annäherung an den Koordinatenursprung gegen $f(0,0) = 0$.)

In allen anderen Punkten ist die Funktion $f(x,y)$ aber stetig.