Aufgabe 18.5

Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$, wobei x, y und z reelle Argumente seien.

a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich!
b) Sei C eine beliebige reelle Zahl. Beschreiben Sie die Niveaufläche $\{(x,y,z) : f(x,y,z)=C\}$!

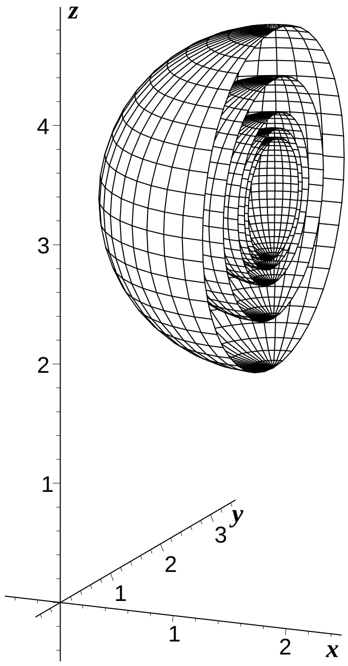
Lösung:

a) Der Nenner wird 0 für $x=1, y=2, z=3$, d.h. die Funktion ist nur in $(1,2,3)$ nicht definiert, man schreibt $\mathrm{DB}(f)=\mathbb{R}^3\setminus\{(1,2,3)\}$.

WB(f): Menge aller positiven reellen Zahlen, d.h. $\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\} = (0,\infty)$.

b) $C \le 0:\ \emptyset$

$C>0:\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = \dfrac{1}{C}$: Kugel mit Radius $\sqrt{\dfrac{1}{C}}$ um $(1,2,3)$.



Schnitt durch die Niveauflächen

$f=0.5$: Radius $\sqrt{2}$
$f=1$: Radius 1
$f=2$: Radius $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$f=3$: Radius $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$f=4$: Radius $\dfrac{1}{2}$

Zur Verständnis kann man zum Beispiel an die räumliche Verteilung der Temperatur denken, wenn sich eine Wärmequelle im Punkt $(1,2,3)$ befindet, ohne dass die konkrete Funktion diesen Sachverhalt wirklich beschreibt. (Für $f(x,y,z)$ ist nämlich $f(1,2,3)=\infty$.)