Aufgabe 18.4

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y$.

a) Von welcher Art sind die Niveaulinien der Funktion?
b) Skizzieren Sie das Niveaulinienbild!
c) Ist die Funktion beschränkt?

Lösung:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y = (x-1)^2 - 1 - (y+3)^2 + 9 = C, \quad (x-1)^2 - (y+3)^2 = C - 8,$

$C > 8$: $\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{C-8}^2} - \dfrac{(y+3)^2}{\sqrt{C-8}^2} = 1$ Hyperbel, Mittelpunkt $(1,-3)$, reelle Halbachse $\sqrt{C-8}$

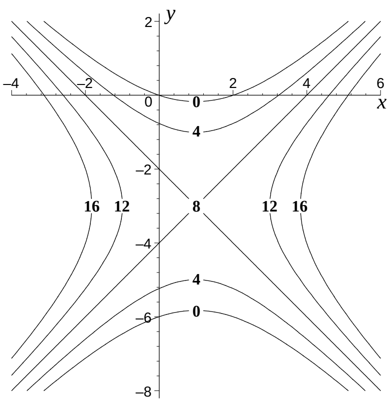
$C = 8$: $(x-1)^2 = (y+3)^2, \ y+3 = \pm(x-1),$

$y = \begin{cases} x-4 \\ -x-2 \end{cases}$ Paar sich schneidender Geraden

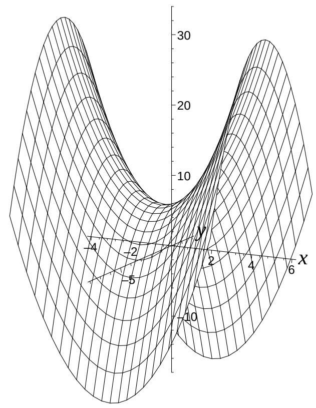
$C < 8$: $\dfrac{(y+3)^2}{\sqrt{8-C}^2} - \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{8-C}^2} = 1$ Hyperbel, Mittelpunkt $(1,-3)$, reelle Halbachse $\sqrt{8-C}$

(Zur Darstellung von Hyperbeln vgl. Aufgabe 17.19a).)

b)



Niveaulinienbild



Funktionsgebirge

c) Da sich für jedes jedes Niveau $C \in \mathbb{R}$ nichtleere Niveaulinien ergeben, ist $\mathbb{R}$ der Wertebereich der Funktion und die Funktion ist unbeschränkt.

Man kann sich davon auch dadurch überzeugen, dass man $f(x,0)$ und $f(0,y)$ betrachtet. Offensichtlich gilt nämlich $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ und $\lim\limits_{y\to\infty} f(0,y) = -\infty$, so dass $f(x,y)$ weder nach oben noch nach unten beschränkt ist.