Aufgabe 18.3

Die Höhe eines Geländepunktes werde durch die Funktion $h(x,y) = 36 + 6x - x^2 + 10y - y^2$ angegeben.

a) Klassifizieren Sie die Fläche $z = 36 + 6x - x^2 + 10y - y^2$!
b) Stellen Sie die Funktion $h(x,y)$ durch Höhenlinien grafisch dar!
c) Hat die Funktion $h(x,y)$ globale Maxima bzw. Minima? Wenn ja, wo liegen diese, wie kann man sie interpretieren?
d) Stellen Sie die Funktion als Fläche grafisch dar!
e) Der Meeresspiegel entspreche dem Höhenniveau 0. Welche Geländepunkte liegen auf Meeresspiegelhöhe?

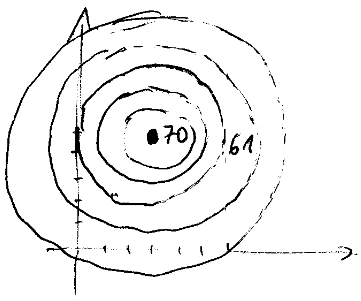
Lösung:

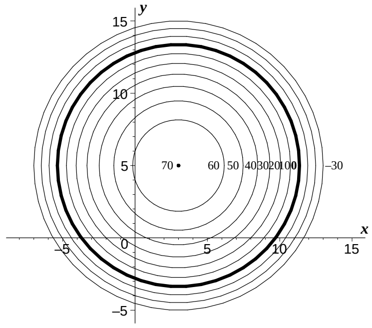
a) Es handelt sich um ein elliptisches Paraboloid. Speziell sind die Ellipsen (Niveaulinien, siehe unten) Kreise, so dass ein Rotationsparaboloid vorliegt.

b) $h(x,y) = 36 - (x-3)^2 + 9 - (y-5)^2 + 25$
$\quad = 70 - (x-3)^2 - (y-5)^2 = C$

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 70 - C$:
Kreis mit Radius $\sqrt{70-C}$ um $(3,5)$

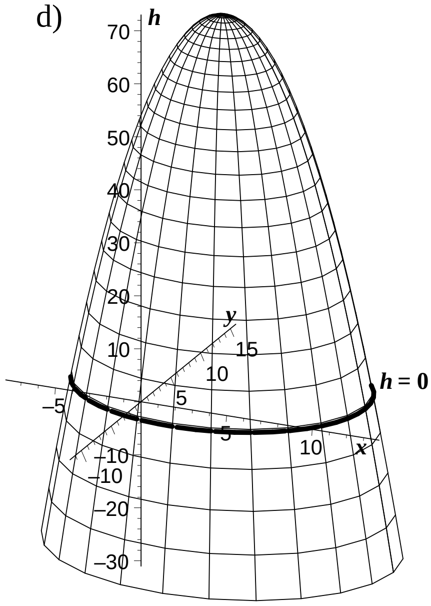
Beispiel: $C = 61$: Radius 3, Kreis berührt y-Achse





c) Offensichtlich muss $70 - C \geq 0$ und daher $C \leq 70$ sein.
Globales Maximum bei $x = 3$, $y = 5$: $h(3,5) = 70$.
Das Maximum kann als Berggipfel interpretiert werden.
Nach unten ist C unbeschränkt: kein Minimum.

d)



Das Rotationsparaboloid entsteht durch Rotation einer Parabel um die zur z-Achse parallele Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) $h(x,y) = 0$ für $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 70$: Kreis mit Radius $\sqrt{70} \approx 8{,}37$ um $(3,5)$