Aufgabe 18.2

Ein Produktionsergebnis P hänge von den Faktoren x und y (z.B. Arbeitszeit, Kapitaleinsatz) nach der Formel $P(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{xy^2}$ ab.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Cobb-Douglas-Funktion handelt!

b) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen? Welcher Wertebereich ergibt sich?

c) Es sei vorgegeben, dass das Produktionsergebnis C erzielt werden muss. Lässt sich der damit implizit gegebene Zusammenhang zwischen x und y explizit nach x bzw. y auflösen?

d) Mit welchen Kombinationen der Produktionsfaktoren x und y lassen sich die Ergebnisse $P=1$, $P=2$, $P=3$ bzw. $P=4$ erreichen?

e) Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!

f) Stellen Sie die Funktion als Fläche („Gebirge“ über der x-y-Ebene) dar!

Hinweis: Als Cobb–Douglas–Funktion bezeichnet man eine Funktion der Art

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{mit} \quad \alpha_i > 0,\ i=0,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1.$$

Lösung:

a) Cobb–Douglas–Funktion: $P(x,y)=\alpha x^{\beta} y^{\gamma}$ mit $\alpha,\beta,\gamma>0$, $\beta+\gamma=1$

Hier: $\alpha = \dfrac{1}{2},\ \beta = \dfrac{1}{3},\ \gamma = \dfrac{2}{3},\ \beta+\gamma = 1.$

b) Mathematisch wäre es möglich, $y\in\mathbb{R}$ beliebig zuzulassen; da es sich um eine dritte Wurzel handelt, könnte man je nach Definition auch beliebige reelle x zulassen.

Für die Anwendung sind jedoch nur $x\geq 0, y\geq 0$ sinnvoll (ausdrücklich einschließlich 0: kein Aufwand $\rightarrow$ kein Ergebnis), also $\text{DB}(P)=\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$. Dafür ergibt sich $\text{WB}(P)=\{z:\ z\geq 0\}$.

c) $P(x,y)=C,\quad \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{xy^2}=C,\quad xy^2=8C^3$: impliziter Zusammenhang von x und y

Nach b) muss $C\geq 0$ sein. Für $C=0$ ist der Zusammenhang zwischen x und y nicht eindeutig, für $C>0$ (dann sind auch $x,y>0$) kann man aber auflösen:

$x=\dfrac{8C^3}{y^2},\ y=\sqrt{\dfrac{8C^3}{x}}$ (da $y\geq 0$): explizite Darstellungen als Funktion einer Veränderlichen

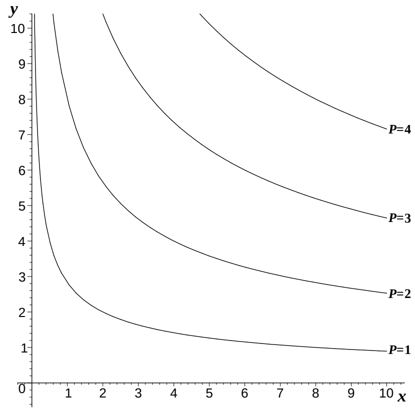
d) $P=1:\ x=\dfrac{8}{y^2},\quad y>0,\ \text{z.B.}(8,1),\ (2,2),\ (\frac{8}{9},3),\ (\frac{1}{2},4)$

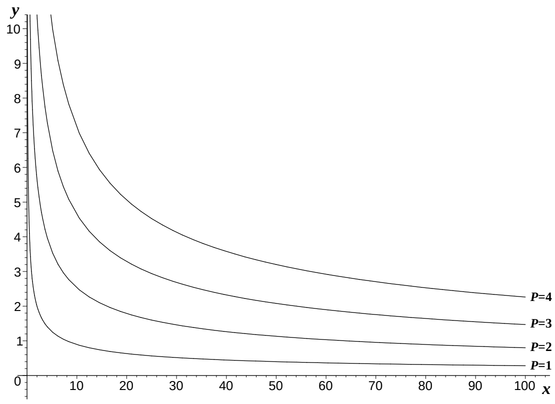
$P=2:\ x=\dfrac{64}{y^2},\quad y>0$

$P=3:\ x=\dfrac{216}{y^2}, y>0$

$P=4:\ x=\dfrac{512}{y^2}, y>0$

e) Darstellung durch Niveaulinien (analog Höhenlinien auf Landkarte)





f) Darstellung als „Funktionsgebirge“