Aufgabe 18.1

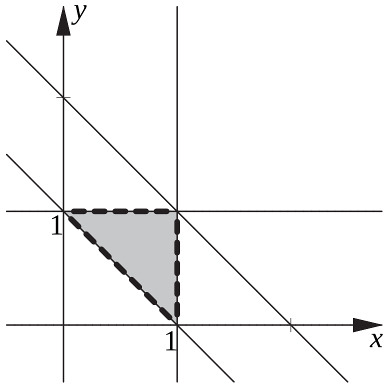
Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c berechnet sich nach der Heronschen Formel zu $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ist.

Stellen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit dem Umfang 2 als Funktion von zwei Seitenlängen x und y dar und geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an! Welche Bedeutung haben die Ecken des Definitionsbereichs?

Lösung:

Da der Umfang gleich 2 ist, gilt $s=1$. Für die dritte Seite gilt $z=2-x-y$ und daher $s-z=1-2+x+y=x+y-1$.

Die gesuchte Funktion lautet somit $A(x,y)=\sqrt{(1-x)(1-y)(x+y-1)}$.



Bei einem „echten“ Dreieck, das also von drei verschiedenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, gebildet wird, ist die Summe von zwei Seiten immer größer als die dritte Seite. Deshalb hat jede Seite eine Länge zwischen 0 und dem halben Umfang: $0<x<1$, $0<y<1$, $0<x+y-1<1$, Letzteres ist äqivalent zu $1-x<y<2-x$.

Definitionsbereich ist also das Innengebiet des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$:

$\mathrm{DB}(f)=\{(x,y): 0<x<1,\ 1-x<y<1\}$.

Lässt man auch „Dreiecke“ zu, bei denen die drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen, so gehören auch die gestrichelt gezeichneten Kanten zum Definitionsbereich, der Flächeninhalt ist dann 0. In den Ecken des Definitionsbereichs gilt $y=0$, $x=y=1$ bzw. $x=0$, dann ist also jeweils eine Seitenlänge gleich 0, d.h. zwei Eckpunkte des Dreiecks fallen zusammen.

Über dem angegebenen Definitionsbereich, ist gesichert, dass der Radikand der Wurzel positiv (bei Einbeziehung der Kanten nichtnegativ) ist.

Durch die Vorschrift $f(x,y)=\sqrt{(1-x)(1-y)(x+y-1)}$ lässt sich eine Funktion auch dann definieren, wenn zwei der Faktoren unter der Wurzel nichtpositiv sind. Allerdings ist dann der Anwendungshintergrund nicht mehr gegeben.