Aufgabe 17.46

Gegeben sei die Fläche $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz=0$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
Hinweis: 6 ist ein Eigenwert.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Schnittkurven der Fläche mit den Koordinatenebenen des transformierten Koordinatensystems! Um was für Kurven handelt es sich?

c) Um was für eine Fläche handelt es sich?

d) Skizzieren Sie grob die Fläche in den transformierten Koordinaten!

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda+\lambda^2)(5-\lambda)+3+3-9(5-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)$$

$$=5-10\lambda+5\lambda^2-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3+6-45+9\lambda-2+2\lambda=-\lambda^3+7\lambda^2-36=0$$

$\lambda_1=6,\qquad (\lambda^3-7\lambda^2+36):(\lambda-6)=\lambda^2-\lambda-6\ ,\qquad \lambda_{2/3}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}=3,-2$

$$\begin{array}{l} \lambda^3-6\lambda^2 \\ \hline -\lambda^2 \qquad +36 \\ -\lambda^2+6\lambda \\ \hline -6\lambda+36 \\ -6\lambda+36 \\ \hline 0 \end{array}$$

Durch die Hauptachsentransformation entsteht $6\xi^2+3\eta^2-2\zeta^2=0$.

b) Schnitt mit ξ-η-Ebene: $\zeta=0$: $6\xi^2+3\eta^2=0 \;\Rightarrow\; \xi=\eta=0$: nur Koordinatenursprung
Schnitt mit ξ-ζ-Ebene: $\eta=0$: $6\xi^2-2\zeta^2=0 \;\Rightarrow\; \zeta=\pm\sqrt{3}\xi$: Paar sich schneid. Geraden
Schnitt mit η-ζ-Ebene: $\xi=0$: $3\eta^2-2\zeta^2=0 \;\Rightarrow\; \zeta=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\eta$: Paar sich schneid. Geraden

c) Der Schnitt mit jeder Ebene $\zeta=c$ ist eine Ellipse $6\xi^2+3\eta^2=2c^2$. Die Halbachsen der Ellipsen wachsen mit steigendem c, für $c=0$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt.
Der Schnitt mit jeder Ebene $\eta=a\xi$ ist ein Paar sich schneidender Geraden
$\zeta=\pm\sqrt{\frac{6+3a^2}{2}}\xi$. Es handelt sich also um einen elliptischen Doppelkegel.

d)