Aufgabe 17.45

Gegeben sei die Fläche $9x^2+9y^2+8z^2-12xz-12yz=153$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich?
c) Skizzieren Sie die Fläche im transformierten Koordinatensystem!

Lösung:

a) Gegeben ist die Fläche $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \\ -6 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 153.$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 9-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} =(9-\lambda)^2(8-\lambda)-36(9-\lambda)-36(9-\lambda) \\ =(9-\lambda)\big((9-\lambda)(8-\lambda)-72\big)=(9-\lambda)(-17\lambda+\lambda^2) \\ =\lambda(9-\lambda)(\lambda-17) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{1/2/3}=0;\ 9;\ 17 \end{array}$$

Die Hauptachsentransformation führt auf $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 0,$

also $9\eta^2+17\zeta^2=153$, $\underline{\underline{\dfrac{\eta^2}{\sqrt{17}^2}+\dfrac{\zeta^2}{3^2}=1.}}$

Bemerkung: Die transformierte Matrix ergibt sich aus den Eigenwerten. Da in der gegebenen Darstellung der Fläche keine linearen Terme enthalten sind, muss die Transformationsmatrix nicht ausgerechnet werden.

b) $\dfrac{\eta^2}{\sqrt{17}^2}+\dfrac{\zeta^2}{3^2}=1$ beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{17}$ und 3 in der η–ζ–Ebene.
Da die ξ–Komponente frei gewählt werden kann, handelt es sich bei der Fläche um einen elliptischen Zylinder.

c)