Aufgabe 17.43

Führen Sie die Hauptachsentransformation für $5x^2+8y^2+5z^2+8xy-2xz+8yz=12$ aus! Um was für eine Fläche handelt es sich? Wie groß sind die Hauptachsenabschnitte? Skizzieren Sie die Fläche in den transformierten Koordinaten!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=12$$

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & 8-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(8-\lambda)(5-\lambda)^2-16-16-(8-\lambda)-16(5-\lambda)-16(5-\lambda)$$

$$=(8-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+25)-32-(8-\lambda)-32(5-\lambda)$$

$$=8\lambda^2-80\lambda+200-\lambda^3+10\lambda^2-25\lambda-32-8+\lambda-160+32\lambda$$

$$=-\lambda^3+18\lambda^2-72\lambda=0\Longrightarrow\lambda^3-18\lambda^2+72\lambda=0$$

$$\lambda_1=0 \qquad \lambda_{2/3}=9\pm\sqrt{81-72}=\begin{cases} 6 \\ 12 \end{cases}$$

EV zu 0

$$\begin{array}{rrr} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ \hline 1 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 24 & 24 \\ \hline 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

EV: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

norm. EV: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu 6

$$\begin{array}{rrr} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

EV: $B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

norm. EV: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu 12

$$\begin{array}{rrr} -7 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -7 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -7 \\ -7 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}$$

EV: $C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

norm. EV: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6/\sqrt{2} & 12/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 24/\sqrt{6} \\ 0 & 6/\sqrt{2} & 12/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/2 & 0 \\ 0 & 0 & 72/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{(da Diagonalmatrix aus EW ohnehin klar)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (\xi \quad \eta \quad \zeta)\, \boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\xi \quad \eta \quad \zeta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 12
$$

$$
6\eta^2 + 12\zeta^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad \eta^2/2 + \zeta^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{(\eta/\sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1}}
$$

Es handelt sich um einen elliptischen Zylinder mit den Halbachsen ∞, $\sqrt{2}$ und 1.