Aufgabe 17.41

Gegeben sei die Fläche $4x^2+5y^2+6z^2+4xy+4yz+16x+32y+32z=-40$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich?
c) Bestimmen Sie im transformierten Koordinatensystem den Mittelpunkt und die Schnittpunkte der Fläche mit den Koordinatenachsen!
d) Skizzieren Sie grob die Fläche in den transformierten Koordinaten!

Lösung:

a) $(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(16\ \ 32\ \ 32)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-40,\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&6\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&2&0\\2&5-\lambda&2\\0&2&6-\lambda\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(4-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda)-4(4-\lambda)-4(6-\lambda)\\&=(4-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda)-4(10-2\lambda)\\&=(5-\lambda)((4-\lambda)(6-\lambda)-8)\\&=(5-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24-8)=0\\&\lambda_1=5,\ \ \lambda_{2/3}=5\pm\sqrt{25-16}=5\pm3=\begin{cases}2\\8\end{cases}\end{aligned}$$

EV zu $\lambda=8$:

$$\begin{array}{ccc}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\2&-3&2\\0&1&-1\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\0&-2&2\\0&1&-1\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-1\\\hline 1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\\hline\end{array}$$

$$\text{EV}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}\mathrel{\widehat{=}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\qquad \text{normiert } \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda=5$:

$$\begin{array}{ccc}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\\\hline 1&-2&0\\1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\\hline 1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&2&1\\\hline 1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\\hline\end{array}$$

$$\text{EV}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\mathrel{\widehat{=}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\qquad \text{normiert } \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda=2$:

$$\begin{array}{ccc}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\\\hline 1&1&0\\0&1&2\\0&2&4\\\hline 1&1&0\\0&1&2\\ & & \\\hline 1&0&-2\\0&1&2\\\hline\end{array}$$

$$\text{EV}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\qquad \text{normiert } \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{9}(\xi \;\; \eta \;\; \zeta)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{3}(16 \;\; 32 \;\; 32)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}(\xi \;\; \eta \;\; \zeta)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 16 & 5 & -4 \\ 16 & -10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(144 \;\; 0 \;\; 0)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}(\xi \;\; \eta \;\; \zeta)\begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(144 \;\; 0 \;\; 0)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} =$$

$$(\xi \;\; \eta \;\; \zeta)\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + (48 \;\; 0 \;\; 0)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 8\xi^2 + 5\eta^2 + 2\zeta^2 + 48\xi = -40$$

$$8(\xi^2 + 6\xi + 9) - 72 + 5\eta^2 + 2\zeta^2 = -40,$$

$$8(\xi+3)^2 + 5\eta^2 + 2\zeta^2 = 32, \quad \underline{\underline{\frac{(\xi+3)^2}{2^2} + \frac{\eta^2}{\sqrt{32/5}^2} + \frac{\zeta^2}{4^2} = 1}}$$

b) Es handelt sich um ein Ellipsoid mit den Halbachsen 2, $\sqrt{32/5}$ und 4.

c) Mittelpunkt ist $(\xi, \eta, \zeta) = (-3, 0, 0)$, Schnittpunkte mit der ξ-Achse sind $(1, 0, 0)$ und $(5, 0, 0)$.

Auf der η-Achse gilt $\xi = \zeta = 0$, für die Schnittpunkte müsste $\dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{\eta^2}{\sqrt{32/5}^2} = 1$ gelten, was wegen $1{,}5^2 > 1$ unmöglich ist. Also gibt es keine Schnittpunkte mit der η-Achse.

Auf der ζ-Achse gilt $\xi = \eta = 0$, für die Schnittpunkte müsste $\dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{\zeta^2}{4^2} = 1$ gelten, was wiederum wegen $1{,}5^2 > 1$ unmöglich ist. Also gibt es auch keine Schnittpunkte mit der ζ-Achse.

d)