

Aufgabe 17.40

- a) Transformieren Sie die Fläche $2x^2 + 4xz + 4y^2 + 5z^2 = 36$ in Hauptachsenlage!
b) Klassifizieren Sie die Fläche und ermitteln Sie ihre Halbachsen!

Lösung:

$$\text{a) } (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 36$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{nach 2. Zeile}}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(10-7\lambda+\lambda^2-4) \\ = (4-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+6) = 0, \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_{2/3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

$$4\xi^2 + 6\eta^2 + \zeta^2 = 36$$

- b) Da alle Eigenwerte positiv sind, handelt es sich um ein Ellipsoid.

$$\frac{\xi^2}{9} + \frac{\eta^2}{6} + \frac{\zeta^2}{36} = 1, \quad \frac{\xi^2}{3^2} + \frac{\eta^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{\zeta^2}{6^2} = 1$$

Das Ellipsoid hat somit die Halbachsen 3, $\sqrt{6}$ und 6.