Aufgabe 17.38

Bringen Sie die Gleichung der Fläche $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-108=0$ in Hauptachsenform! Um was für eine Fläche handelt es sich?

Lösung:

$$5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-108=(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&6&2\\0&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-108=0$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&-2&0\\-2&6-\lambda&2\\0&2&7-\lambda\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda)-4(5-\lambda)-4(7-\lambda)\\&=(5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda)-4(12-2\lambda)=(6-\lambda)[(5-\lambda)(7-\lambda)-8]\\&=(6-\lambda)(35-12\lambda+\lambda^2-8)=(6-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+27),\\&\lambda_1=6,\ \lambda_{2/3}=6\pm\sqrt{36-27}=6\pm3=\begin{cases}3\\9\end{cases}\end{aligned}$$

Erkennt man nicht, dass $(6-\lambda)$ ausgeklammert werden kann und multipliziert alles aus, so entsteht die kubische Gleichung $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$. Wenn die Nullstellenbestimmung nicht mit einem Taschenrechner erfolgt, müsste man z.B. $\lambda=3$ als Nullstelle erraten und anschließend Polynomdivison durch $(\lambda-3)$ vornehmen.

Wir nummerieren im Folgenden die Eigenwerte in aufsteigender Folge.

EV zu $\lambda_1=3$:

$$\begin{array}{rrr}2&-2&0\\-2&3&2\\0&2&4\\\hline 1&-1&0\\0&1&2\\0&1&2\\\hline 1&-1&0\\0&1&2\\\hline 1&0&2\\0&1&2\end{array}$$

$$\begin{aligned}x_1+2x_3&=0\\x_2+2x_3&=0\end{aligned}$$

$$\text{EV}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \text{norm.:}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2=6$:

$$\begin{array}{rrr}-1&-2&0\\-2&0&2\\0&2&1\\\hline 1&2&0\\1&0&-1\\-1&0&1\\\hline 1&2&0\\1&0&-1\\\hline 1&2&0\\0&2&1\end{array}$$

$$\begin{aligned}x_1+2x_2&=0\\x_3+2x_2&=0\end{aligned}$$

$$\text{EV}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\ \text{norm.:}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_3=9$:

$$\begin{array}{rrr}-4&-2&0\\-2&-3&2\\0&2&-2\\\hline 1&\frac12&0\\0&-2&2\\0&2&-2\\\hline 1&\frac12&0\\0&1&-1\\\hline 1&0&\frac12\\0&1&-1\end{array}$$

$$\begin{aligned}x_1+\tfrac12x_3&=0\\x_2-\ \ x_3&=0\end{aligned}$$

$$\text{EV}\begin{pmatrix}-\frac12\\1\\1\end{pmatrix},\ \text{norm.:}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^\mathsf{T},\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&6&2\\0&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-108=$$

$$\frac{1}{9}(\xi\quad\eta\quad\zeta)\underbrace{\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&6&2\\0&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}6&12&-9\\6&-6&18\\-3&12&18\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}27&0&0\\0&54&0\\0&0&81\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}-108=$$

$$(\xi\quad\eta\quad\zeta)\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}-108=0$$

Dieses Ergebnis hätte ohne Ausmultiplizieren der Matrizen notiert werden können, da $\boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ die Diagonalmatrix aus den 3 Eigenwerten ist.

Die Matrix $\boldsymbol{P}$ muss nur ausgerechnet werden, wenn die Koordinatentransformationsgleichung tatsächlich benötigt wird. Das ist dann der Fall, wenn die quadratische Form lineare Glieder enthält (wie Aufgabe 17.14) oder die Angabe der Koordinatentransformation explizit gefordert wird. Hier war die Berechnung der Eigenvektoren eigentlich überflüssig.

$$3\xi^2+6\eta^2+9\zeta^2=108,\quad \frac{\xi^2}{36}+\frac{\eta^2}{18}+\frac{\zeta^2}{12}=1,\quad \underline{\underline{\frac{\xi^2}{6^2}+\frac{\eta^2}{(3\sqrt{2})^2}+\frac{\zeta^2}{(2\sqrt{3})^2}=1}}$$

Also handelt es sich um ein Ellipsoid mit den Halbachsen $6,\ 3\sqrt{2}$ und $2\sqrt{3}$.

(Ellipsoid ist räumliche Verallgemeinerung der Ellipse, vorstellbar als „deformierte Kugel“.)