Aufgabe 17.37

a) Führen Sie für die Kurve $13x^2-18xy+37y^2-2\sqrt{10}\,x+6\sqrt{10}\,y=\frac{75}{2}$ die Hauptachsentransformation aus! Um welche Art von Kurve handelt es sich?
b) Skizzieren Sie die Kurve im transformierten Koordinatensystem!
c) Um welchen Winkel wurde bei der Hauptachsentransformation gedreht?
d) Geben Sie die Geradengleichungen der Achsen des transformierten Koordinatensystems im Ausgangssystem an!
e) Skizzieren Sie die Kurve im Ausgangssystem!

Lösung:

a) $\begin{vmatrix} 13-\lambda & -9 \\ -9 & 37-\lambda \end{vmatrix}=481-50\lambda+\lambda^2-81=\lambda^2-50\lambda+400=0,\ \ \lambda_{1/2}=25\pm\sqrt{625-400}=\begin{cases}10\\40\end{cases}$

EV zu $\lambda_1=10$: $\begin{matrix}3 & -9\\ -9 & 27\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=40$: $\begin{matrix}-27 & -9\\ -9 & -3\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{10}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & -9\\-9 & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{10}}\left(-2\sqrt{10}\ \ 6\sqrt{10}\right)\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=$$

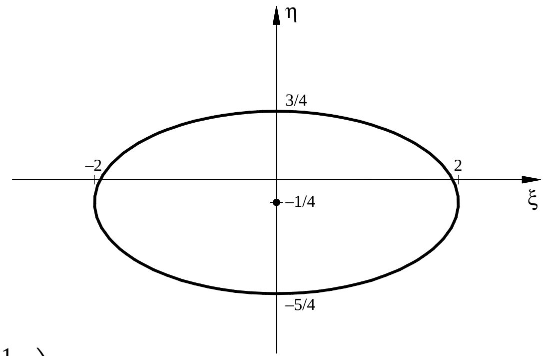
$$\frac{1}{10}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & -40\\10 & 120\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+(-2\ \ 6)\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{75}{2}$$

$$\frac{1}{10}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}100 & 0\\0 & 400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+(0\ \ 20)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=10\xi^2+40\eta^2+20\eta=\frac{75}{2}$$

$$10\xi^2+40\left(\eta+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{40}{16}=\frac{75}{2},\quad 10\xi^2+40\left(\eta+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{75}{2}+\frac{5}{2}=40$$

$\frac{\xi^2}{2^2}+\frac{(\eta+\frac{1}{4})^2}{1^2}=1$: Ellipse, Mittelpunkt $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$, Halbachsen 2; 1.

b)



c) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, α: Drehwinkel

$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, I. Quadrant, Drehwinkel $\alpha=\arctan\frac{1}{3}\approx 18.43°$

d) Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

ξ–Achse: $\eta = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3\xi \\ \xi \end{pmatrix}$, $x = \frac{3\xi}{\sqrt{10}}, y = \frac{\xi}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3}x,\ y = \frac{1}{3}x$

η–Achse: $\xi = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -\eta \\ 3\eta \end{pmatrix}$, $x = \frac{-\eta}{\sqrt{10}}, y = \frac{3\eta}{\sqrt{10}} = -3x,\ y = -3x$

e)