Aufgabe 17.36

Führen Sie für die Kurve $9x^2+12xy+4y^2+26\sqrt{13}x+13\sqrt{13}y=0$ die Hauptachsentransformation aus und klassifizieren Sie sie! Stellen Sie die Kurve im x-y-System grafisch dar!

Lösung:

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}9 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\sqrt{13}\,(26\quad 13)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}9-\lambda & 6\\ 6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)(4-\lambda)-36=36-13\lambda+\lambda^2-36=(\lambda-13)\lambda,\quad \lambda_{1/2}=13;\,0$$

EV zu $\lambda_1=13$: $\quad \begin{matrix}-4 & 6\\ 6 & -9\end{matrix}\quad$ EV $\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$, normiert $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=0$: $\quad \begin{matrix}9 & 6\\ 6 & 4\end{matrix}\quad$ EV $\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$, normiert $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$

Drehung: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\qquad$ (Dabei gilt $\det\boldsymbol{V}=1$.)

$$\frac{1}{13}(\xi\quad\eta)\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}(26\quad 13)\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=0$$

$$(\xi\quad\eta)\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+(104\quad -13)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=0$$

(Da zur Drehung die orthogonale Matrix aus den normierten Eigenwerten verwendet wurde, ist beim quadratischen Anteil ohnehin klar, dass die Diagonalmatrix aus den normierten Eigenwerten entsteht. Für die Koeffizienten des linearen Anteils ist aber die Berechnung mit der Drehmatrix erforderlich.)

$$13\xi^2+104\xi-13\eta=0,\quad \xi^2+8\xi-\eta=0,$$
$$\underline{\underline{\eta=\xi^2+8\xi=(\xi+4)^2-16}}$$

Also handelt sich um eine Parabel. Im transformierten Koordinatensystem liegt ihr Scheitelpunkt im Punkt $(-4,-16)$.

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\ \text{gilt}$$

für $\alpha=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}}\approx 33.69^\circ$ (da I. Quadrant).

Folglich entsteht das ξ-η-System aus dem x-y-System durch Drehung um ca. 33.69°.