## Aufgabe 17.35

Drehen Sie das kartesische $x$-$y$-Koordinatensystem so, dass die die Kurve $x^2+6xy+9y^2+3\sqrt{10}x-\sqrt{10}y=0$ in Hauptachsenlage überführt wird! Um was für eine Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Kurve im $x$-$y$-System!

**Lösung:**

$$x^2+6xy+9y^2+3\sqrt{10}x-\sqrt{10}y=(x\ \ y)\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(3\sqrt{10}\ \ -\sqrt{10})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&3\\3&9-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(9-\lambda)-9=9-10\lambda+\lambda^2-9=\lambda^2-10\lambda=0,\ \ \lambda_1=10,\ \lambda_2=0$$

EV zu EW $\lambda_1=10$: $\begin{array}{rr}-9&3\\3&-1\end{array}$ EV $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=0$: $\begin{array}{rr}1&3\\3&9\end{array}$ EV $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{10}(\xi\ \ \eta)\underbrace{\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}10&0\\30&0\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}100&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\underbrace{\underbrace{(3\sqrt{10}\ \ -6\sqrt{10})\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}}_{(3\ \ -1)\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}}}_{(0\ \ -10)}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=0$$

$$(\xi\ \ \eta)\underbrace{\begin{pmatrix}10&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{ohnehin klar:}\\\text{Diag.matrix aus EW}}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+(0\ \ -10)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=0$$

$10\xi^2-10\eta=0,\ \ \xi^2-\eta=0,\ \ \underline{\underline{\eta=\xi^2}}$ : Normalparabel

Für die für die Koordinatentransformation verwendete orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$ gilt $\det\boldsymbol{V}=1$, so dass eine Drehung realisiert wurde.

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&-\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Somit liegt $\alpha$ im I. Quadranten, bei der Hauptachsentransformation ist eine Drehung um den Winkel $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\approx 71{,}56^\circ$ erfolgt.