Aufgabe 17.34

Führen Sie für die Kurve $4x^2+4xy+y^2+8\sqrt{5}x-6\sqrt{5}y=0$ die Hauptachsentransformation durch! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im x-y-System grafisch dar!

Lösung:

$$4x^2+4xy+y^2+8\sqrt{5}x-6\sqrt{5}y=(x\quad y)\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(8\sqrt{5}\quad -6\sqrt{5})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=4-5\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-5\lambda=0,\ \ \lambda_1=5,\ \lambda_2=0$$

EV zu EW $\lambda_1=5$: $\begin{matrix}-1&2\\2&-4\end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=0$: $\begin{matrix}4&2\\2&1\end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{5}(\xi\quad\eta)\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}10&0\\5&0\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}25&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\underbrace{\underbrace{(8\sqrt{5}\quad -6\sqrt{5})\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}_{(8\quad -6)\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}}_{(10\quad -20)}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=0$$

$$(\xi\quad\eta)\underbrace{\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{ohnehin klar:}\\\text{Diag.matrix aus EW}}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+(10\quad -20)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=0$$

$5\xi^2+10\xi-20\eta=0,\ \ \xi^2+2\xi-4\eta=0,\ \ \underline{\underline{\eta=\frac{1}{4}(\xi+1)^2-\frac{1}{4}}}$: Parabel mit Scheitel in $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$

Für die für die Koordinatentransformation verwendete orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$ gilt $\det\boldsymbol{V}=1$, so dass eine Drehung realisiert wurde.

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Somit liegt α im I. Quadranten, bei der Hauptachsentransformation ist eine Drehung um den Winkel $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 26.57^\circ$ erfolgt.