Aufgabe 17.33

Führen Sie für die Kurve $x^2+xy+y^2=6$ die Hauptachsentransformation durch und stellen Sie die Kurve im transformierten und im Ausgangskoordinatensystem graphisch dar!

Lösung:

Die Eigenwerte ergeben sich aus $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1-2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4} = \lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0,$

d.h. $\lambda_{1/2} = 1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2};\frac{1}{2}.$

$$\lambda_1=\frac{3}{2}:\quad \begin{array}{rr|} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \text{normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}:\quad \begin{array}{rr|} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \text{normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Die Hauptachsentransformation erfolgt demzufolge durch $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= \frac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2=6. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um die Ellipse $\frac{\xi^2}{2^2}+\frac{\eta^2}{(2\sqrt{3})^2}=1$ mit den Halbachsen 2 und $2\sqrt{3}$.

Aus $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)$ erhält man durch Addition bzw. durch Subtraktion $\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\ \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x),$ so dass die Koordinatenachsen des transformierten Systems wegen $\eta=0\Leftrightarrow y=x,\ \xi=0\Leftrightarrow y=-x$ aus denen des Ausgangssystems durch Drehung um 45° entstehen.