Aufgabe 17.30

Führen Sie für die Kurve $19x^2+6xy+11y^2+20\sqrt{10}x+35=0$ die Hauptachsentransformation durch, klassifizieren Sie sie und skizzieren Sie sie im transformierten Koordinatensystem!

Lösung:

$$(x \quad y)\begin{pmatrix}19 & 3\\ 3 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(20\sqrt{10} \quad 0)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+35=0$$

$$\begin{vmatrix}19-\lambda & 3\\ 3 & 11-\lambda\end{vmatrix}=(19-\lambda)(11-\lambda)-9=209-30\lambda+\lambda^2-9=\lambda^2-30\lambda+200=0,$$
$$\lambda_{1/2}=15\pm\sqrt{225-200}=15\pm 5=10;\,20$$

EV zu EW $\lambda_1=10$: $\begin{matrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=20$: $\begin{matrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{10}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}19 & 3\\ 3 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-10 & 60\\ 30 & 20\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 200\end{pmatrix}\text{ (ohnehin klar)}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\underbrace{\underbrace{(20\sqrt{10} \quad 0)\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}}_{(20 \quad 0)\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}}}_{(-20 \quad 60)}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+35=0$$

$$10\xi^2+20\eta^2-20\xi+60\eta+35=0,\quad \xi^2-2\xi+2\eta^2+6\eta+\frac{7}{2}=0$$

$$(\xi-1)^2-1+2\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{9}{4}+\frac{7}{2}=0,\quad (\xi-1)^2+2\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^2=1+\frac{9}{2}-\frac{7}{2}=2$$

$$\underline{\underline{\frac{(\xi-1)^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{(\eta+3/2)^2}{1^2}=1}}:\quad \text{Ellipse mit Mittelpunkt } (1,-3/2) \text{ und Halbachsen } \sqrt{2} \text{ und } 1$$