Aufgabe 17.29

Führen Sie für die Kurve $4xy+3y^2+4x-2y-5=0$ die Hauptachsentransformation aus, klassifizieren Sie sie und zeichnen Sie sie im transformierten Koordinatensystem!

Lösung:

$$(x \quad y)\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(4 \quad -2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-5=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&2\\3&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)-4=\lambda^2-3\lambda-4=0,\quad \lambda_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}$$

EV zu EW $\lambda_1=4$: $\quad \begin{matrix}-4&2\\2&-1\end{matrix} \quad$ EV $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=-1$: $\quad \begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix} \quad$ EV $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{5}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}4&2\\8&-1\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}20&0\\0&-5\end{pmatrix}\text{ (ohnehin klar)}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\underbrace{\underbrace{(4 \quad -2)\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}}_{\frac{1}{\sqrt5}(0 \quad -10)}}_{(0 \quad -2\sqrt5)}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}-5=0$$

$$4\xi^2-\eta^2-2\sqrt5\eta-5=\underline{\underline{4\xi^2-(\eta+\sqrt5)^2=0}}$$

$(\eta+\sqrt5)^2=4\xi^2,\ \eta+\sqrt5=\pm2\xi,\ \underline{\underline{\eta=-\sqrt5\pm2\xi}}$: Paar sich in $(0,-\sqrt5)$ schneidender Geraden