Aufgabe 17.27

a) Führen Sie für die Kurve $-3x^2+10\sqrt{3}xy-13y^2+2\sqrt{3}x+2y=16$ die Hauptachsentransformation aus und klassifizieren Sie sie!

b) Zeichnen Sie die Kurve im transformierten Koordinatensystem!

Lösung:

a) $(x \quad y)\begin{pmatrix}-3 & 5\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3} & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(2\sqrt{3} \quad 2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=16$

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 5\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3} & -13-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)(-13-\lambda)-75=39+16\lambda+\lambda^2-75=\lambda^2+16\lambda-36=0$$

$\lambda_{1/2}=-8\pm\sqrt{64+36}=2;\,-18$: Also handelt es sich um eine Hyperbel.

EV zu $\lambda_1=2$:
$$\begin{array}{cc}-5 & 5\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3} & -15\\ \hline 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0\end{array} \qquad \text{EV } \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_1=-18$:
$$\begin{array}{cc}15 & 5\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3} & 5\\ \hline \sqrt{3} & 1\\ 0 & 0\end{array} \qquad \text{EV } \begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Drehung: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{4}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 5\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3} & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{2}{2}(\sqrt{3} \quad 1)\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=16$$

$$(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+(4 \quad 0)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=16$$

$2\xi^2-18\eta^2+4\xi=16,\ 2(\xi+1)^2-2-18\eta^2=16,\ 2(\xi+1)^2-18\eta^2=18,\ \underline{\underline{\dfrac{(\xi+1)^2}{3^2}-\eta^2=1}}:$

Hyperbel mit Mittelpunkt $(-1,0)$ und reeller Halbachse 3

b)