Aufgabe 17.21

In der kartesischen Koordinatenebene sei die Kurve $21x^2+8\sqrt{3}xy+13y^2=225$ gegeben.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Klassifizieren Sie die Kurve und skizzieren Sie sie in dem transformierten Koordinatensystem!
c) Um welchen Winkel werden bei der Hauptachsentransformation die Koordinatenachsen gedreht? Skizzieren Sie die Kurve im Ausgangskoordinatensystem!

Lösung:

a) $(x\ \ y)\begin{pmatrix}21 & 4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=225$

$$\begin{vmatrix}21-\lambda & 4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{3} & 13-\lambda\end{vmatrix}=(21-\lambda)(13-\lambda)-(4\sqrt{3})^2=273-34\lambda+\lambda^2-48=\lambda^2-34\lambda+225=0,$$

$$\lambda_{1/2}=17\pm\sqrt{289-225}=17\pm\sqrt{64}=\begin{cases}25\\ 9\end{cases}$$

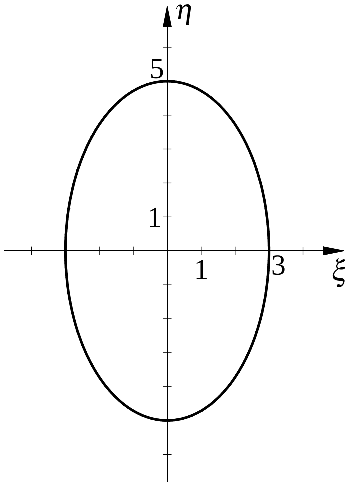
EV zu EW $\lambda_1=25$: $\begin{array}{cc}-4 & 4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{3} & -12\\ \hline 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0\end{array}$ EV $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$, normierter EV $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$

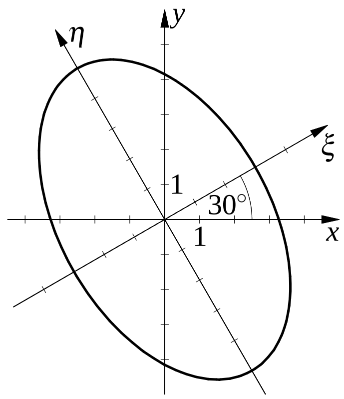
EV zu EW $\lambda_2=9$: $\begin{array}{cc}12 & 4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{3} & 12\\ \hline \sqrt{3} & 1\\ 0 & 0\end{array}$ EV $\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, normierter EV $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

Hauptachsentransformation: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix}21 & 4\sqrt{3}\\ 4\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=25\xi^2+9\eta^2=225$$

b) $\dfrac{\xi^2}{9}+\dfrac{\eta^2}{25}=1,\quad \dfrac{\xi^2}{3^2}+\dfrac{\eta^2}{5^2}=1$: Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen 3 und 5





c) $\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, Drehwinkel also $\alpha=\dfrac{\pi}{6}=30^\circ$

Bild oben rechts