Aufgabe 17.20

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation für die Kurve $2xy+\sqrt{2}(x+y)=0$ durch!
b) Zeichnen Sie die Kurve!

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=0,\ \ \lambda_{1/2}=\pm 1$

EV zu $\ 1$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

EV zu -1: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ EV $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $\cos\alpha=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha=\frac{\pi}{4}$, Drehung um 45°

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}=0$

$\xi^2-\eta^2+2\xi=0,\quad (\xi+1)^2-\eta^2=1:$
Hyperbel, Mittelpunkt $(-1,0)$, reelle Halbachse 1

Das transformierte Koordinatensystem entsteht durch Drehung um 45°.

b)