Aufgabe 17.18

Gegeben sei die Kurve $50x^2 - 240xy + 288y^2 + 104x - 689y + 169 = 0$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Kurve handelt es sich?
c) Um welchen Winkel wurde das Koordinatensystem bei der Hauptachsentransformation gedreht?
d) Skizzieren Sie die Kurve unter Angabe beider Koordinatensysteme!

Lösung:

Gegeben ist die Kurve $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -120 \\ -120 & 288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 104 & -689 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 169 = 0.$

a) Hauptachsentransformation

$$\begin{vmatrix} 50-\lambda & -120 \\ -120 & 288-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (50-\lambda)(288-\lambda) - 14400 = 14400 - 338\lambda + \lambda^2 - 14400 \\ &= \lambda^2 - 338\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 338 \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$

$$\begin{array}{rr} 50 & -120 \\ -120 & 288 \\ \hline 5 & -12 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{norm. EV } \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 338$

$$\begin{array}{rr} -288 & -120 \\ -120 & -50 \\ \hline 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{norm. EV } \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Drehung kann also nach der Vorschrift $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ erfolgen.

Bemerkung: Selbstverständlich können die Eigenvektoren auch in anderer Reihenfolge aneinander gesetzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass die Matrix $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ nicht die Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ hat. In diesem Falle kommt zu der Drehung eine Klappung um die ξ-Achse hinzu. Will man nur drehen, könnte man in diesem Falle z.B. mit dem Eigenvektor $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ arbeiten und die Matrix $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ verwenden.
Dass eine orthogonale Matrix Drehmatrix ist, erkennt man daran, dass ihre Determinante gleich 1 ist, vgl. Aufgabe 17.6.

$$\frac{1}{169}\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 & -120 \\ -120 & 288 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 104 & -689 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + 169 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 338 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -169 & -676 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + 169 = 0,$$

$$338\eta^2 - 169\xi - 676\eta + 169 = 0,\ \ 2\eta^2 - \xi - 4\eta + 1 = 0,\ \ 2(\eta-1)^2 - 2 - \xi + 1 = 0,$$

$$\underline{\underline{\xi = 2(\eta-1)^2 - 1}}$$

b) Es handelt sich um eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $(\xi, \eta) = (-1, 1)$.

c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix},\ \cos\alpha = \frac{12}{13},\ \sin\alpha = \frac{5}{13},\ \underline{\underline{\alpha \approx 22.62^\circ}}$

Bemerkung: Bei Verwendung der Drehmatrix $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich ein Drehwinkel von $-67{,}38^\circ$ und die Darstellung $\eta = 2(\xi+1)^2 - 1$.

d)