Aufgabe 17.17

Führen Sie die Hauptachsentransformation für die Kurve $x^2-6xy+y^2+6\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y=18$ aus und skizzieren Sie die Kurve im transformierten und im Ausgangskoordinatensystem!

Lösung:

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+6\sqrt{2}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=18,\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1-9=\lambda^2-2\lambda-8=0,\quad \lambda_{1/2}=1\pm\sqrt{1+8}=\begin{cases}4\\ -2\end{cases}$$

EV zu EW $\lambda_1=4$:

$$\begin{array}{rr}-3 & -3\\ -3 & -3\\ \hline 1 & 1\end{array}\ \text{EV}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ \text{norm.}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

EV zu EW $\lambda_2=-2$:

$$\begin{array}{rr}3 & -3\\ -3 & 3\\ \hline 1 & -1\end{array}\ \text{EV}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ \text{norm.}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

Das ξ-η-System entsteht aus dem x-y-System durch Drehung um $-45°$.

$$\frac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+6\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+(0\ \ 12)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=$$

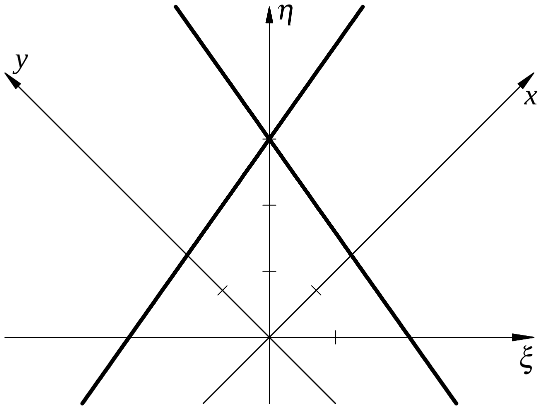
$$\frac{1}{2}(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+(0\ \ 12)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=4\xi^2-2\eta^2+12\eta=18$$

$$4\xi^2-2(\eta^2-6\eta+9)=0$$

$$4\xi^2-2(\eta-3)^2-\xi^2=(\eta-3)^2$$

$$\eta-3=\pm\sqrt{2}\xi$$

$$\underline{\underline{\eta=3\pm\sqrt{2}\xi}}$$



Es handelt sich um ein Paar sich im Punkt $(0,3)$ des ξ-η-Systems schneidender Geraden mit dem Anstieg $\pm\sqrt{2}$.