Aufgabe 17.16

Beseitigen Sie das gemischte Glied in der quadratischen Form $q(x,y)=8x^2+4xy+5y^2$

a) durch Hauptachsentransformation entsprechend Aufgabe 17.15 und
b) durch quadratische Ergänzung von $8x^2+4xy$!
c) Stellen Sie die Basisvektoren des x-y-Koordinatensystems und der beiden transformierten Systeme grafisch dar und diskutieren Sie den Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen!
d) Minimieren Sie die Funktion $q(x,y)$ für $x,y\in\mathbb{R}$ mithilfe der beiden Transformationen!

Lösung:

a) Die Hauptachsentransformation erfolgt wie bei den Aufgaben 17.15 und 18.24 beschrieben:

$q(x,y)$ kann in der Form $q(x,y) = (x \quad y)\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ notiert werden. Dabei wird mit der Aufteilung des Summanden $4xy$ in $2xy+2yx$ erreicht, dass eine symmetrische Matrix entsteht, für die die Matrix aus den normierten Eigenvektoren $\boldsymbol{V}$ orthogonal ist und entsprechend Aufgaben 17.5 und 17.6 eine Drehung vermittelt. Die dafür zusätzlich erforderliche Eigenschaft $\det\boldsymbol{V}=1$ ist immer erreichbar, ggf. muss einer der normierten Eigenvektoren mit -1 multipliziert werden. Insgesamt gibt es 8 Möglichkeiten zur Aufstellung einer orthogonalen Matrix aus normierten Eigenvektoren zweireihiger symmetrischer Matrizen (Reihenfolge der Eigenwerte sowie jeweils zwei Richtungen für die Eigenvektoren). In 4 Fällen handelt es sich um Drehungen, in den anderen 4 kommt eine Klappung dazu.

Nach Aufgabe 16.27b) ist $\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

Mit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$, $(x \quad y)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$ erhält man

$$q(x,y)=(\xi \quad \eta)\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}_{\text{bekannt aus Aufgabe 16.27b)}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}9&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=9\xi^2+4\eta^2.$$

Für die für die Koordinatentransformation verwendete orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$ gilt $\det\boldsymbol{V}=1$, so dass eine Drehung realisiert wurde.

$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ gilt für $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 26{,}57°$, da α wegen $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ im I. Quadranten liegt. Folglich entsteht das ξ-η-System aus dem x-y-System durch eine Drehung um ca. $26{,}57°$.

Je nach Wahl der Drehmatrix können sich auch die Drehwinkel $116{,}57°$, $206{,}57°$ bzw. $296{,}57°$ ergeben. Das Achsenkreuz ist immer dasselbe. Es gibt insgesamt 8 Möglichkeiten, dieses mit Koordinatenrichtungen zu beschriften, dabei handelt es sich in 4 Fällen um ein Rechtssystem. Dies entspricht den oben erwähnten 8 Möglichkeiten zur Aufstellung einer orthogonalen Matrix aus normierten Eigenvektoren, durch die in 4 Fällen Drehungen realisiert werden.

b) $q(x,y) = 8x^2+4xy+5y^2 = 8\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)+5y^2=8\left(x+\frac{y}{4}\right)^2-8\frac{y^2}{16}+5y^2 = 8\left(x+\frac{y}{4}\right)^2+\frac{9}{2}y^2$

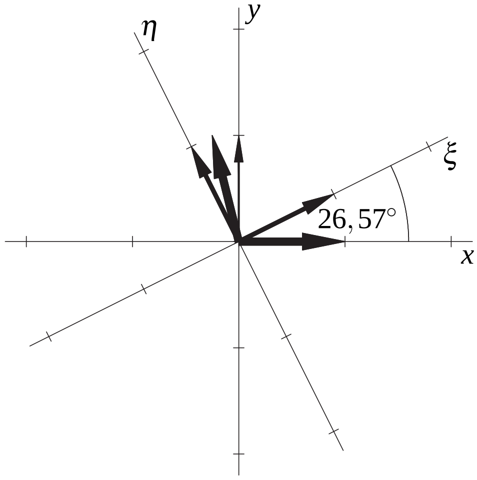
$= 8\lambda^2+\frac{9}{2}\mu^2$ mit $\lambda=x+\frac{y}{4},\ \mu=y$

Wegen $x=\lambda-\frac{y}{4}=\lambda-\frac{1}{4}\mu,\ y=\mu$ kann diese Koordinatentransformation auch in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ notiert werden.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$



Bei a) handelt es sich um eine orthogonale Koordinatentransformation, bei der wieder ein kartesisches Koordinatensystem entsteht. Bei b) ist das nicht der Fall, die Basisvektoren des transformierten Systems sind weder orthogonal noch haben sie gleiche Länge.

d) $q(x,y)=8x^2+4xy+5y^2=9\xi^2+4\eta^2$ nimmt sein Minimum offenbar mit 0 für $\xi=\eta=0$ an. Wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ ist dort auch $x=y=0$.

Diese Argumentation ist auch für die nichtorthogonale Transformation möglich:

$q(x,y)=8x^2+4xy+5y^2=8\lambda^2+\frac{9}{2}\mu^2$ nimmt sein Minimum offenbar mit 0 für $\lambda=\mu=0$ an. Wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ ist dort auch $x=y=0$.