Aufgabe 17.15

Führen Sie unter Verwendung der Matrix $\boldsymbol{V}$ aus Aufgabe 16.27b) für die Kurve $8x^2+4xy+5y^2=36$ die Hauptachsentransformation aus! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve grafisch dar!

Lösung:

$$8x^2+4xy+5y^2=(x \quad y)\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=36$$

Dabei wird mit der Aufteilung des Summanden $4xy$ in $2xy+2yx$ erreicht, dass eine symmetrische Matrix entsteht, für die die Matrix aus den normierten Eigenvektoren $\boldsymbol{V}$ orthogonal ist und entsprechend Aufgaben 17.5 und 17.6 eine Drehung vermittelt. Die dafür zusätzlich erforderliche Eigenschaft $\det \boldsymbol{V}=1$ ist immer erreichbar, ggf. muss einer der normierten Eigenvektoren mit -1 multipliziert werden. Insgesamt gibt es 8 Möglichkeiten zur Aufstellung einer orthogonalen Matrix aus normierten Eigenvektoren zweireihiger symmetrischer Matrizen (Reihenfolge der Eigenwerte sowie jeweils zwei Richtungen für die Eigenvektoren). In 4 Fällen handelt es sich um Drehungen, in den anderen 4 kommt eine Klappung dazu.

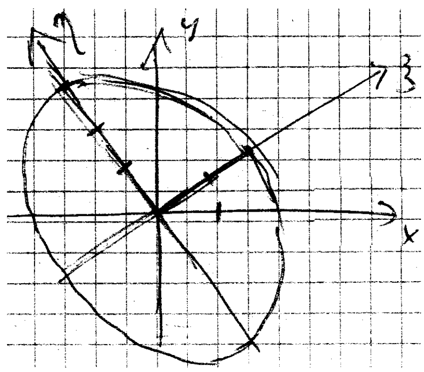
Nach Aufgabe 16.27b) ist $\boldsymbol{V}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Mit $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, $(x \quad y)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ erhält man

$$(x \quad y)\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(\xi \quad \eta)\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{\text{bekannt aus Aufgabe 16.27b)}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$=9\xi^2+4\eta^2=36.$$

Somit handelt es sich um eine Ellipse, deren Gleichung in der Form $\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\eta^2}{9}=\dfrac{\xi^2}{2^2}+\dfrac{\eta^2}{3^2}=1$ notiert werden kann. Die Halbachsen der Ellipse sind also 2 und 3, Mittelpunkt ist der Koordinatenursprung.



Für die für die Koordinatentransformation verwendete orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$ gilt $\det \boldsymbol{V}=1$, so dass eine Drehung realisiert wurde.

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \text{ gilt für}$$

$\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 26{,}57^\circ$, da α wegen $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ im I. Quadranten liegt. Folglich entsteht das ξ-η-System aus dem x-y-System durch eine Drehung um ca. $26{,}57^\circ$.

Je nach Wahl der Drehmatrix können sich auch die Drehwinkel $116{,}57^\circ$, $206{,}57^\circ$ bzw. $296{,}57^\circ$ ergeben. Das Achsenkreuz ist immer dasselbe. Es gibt insgesamt 8 Möglichkeiten, dieses mit Koordinatenrichtungen zu beschriften, dabei handelt es sich in 4 Fällen um ein Rechtssystem. Dies entspricht den oben erwähnten 8 Möglichkeiten zur Aufstellung einer orthogonalen Matrix aus normierten Eigenvektoren, durch die in 4 Fällen Drehungen realisiert werden.