Aufgabe 17.14

Führen Sie für die Kurve $16x^2+24xy+9y^2+20x+140y+500=0$ die Hauptachsentransformation aus, klassifizieren Sie sie und stellen Sie sie grafisch dar!

Lösung:

Klassifikation von Kurven 2. Ordnung:

Hat quadratische Form die Gestalt $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$, so handelt es sich bei
$ab>0$ um Ellipse,
$ab<0$ um Hyperbel,
$ab=0,\ a^2+b^2\neq 0$ um Parabel,
$a=b=0,\ c^2+d^2\neq 0$ um Gerade.

Durch gemischtes Glied in der Aufgabenstellung ist nicht zu sehen, um was für eine Kurve es sich handelt.

Ziel: gemischtes Glied beseitigen, dafür Darstellung als quadratische Form:

$$16x^2+24xy+9y^2+20x+140y+500=(x\ \ y)\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(20\ \ 140)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+500=0.$$

Koordinatentransformation in Diagonalgestalt für $\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}$, damit gemischtes Glied beseitigt wird.

Satz Für reelle symmetrische Matrizen ist die aus den **normierten** EV gebildete Matrix $\boldsymbol{V}$ orthogonal: $\boldsymbol{V}^\mathsf{T}=\boldsymbol{V}^{-1}$, d.h. $\boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$ ist Diagonalmatrix aus Eigenwerten.

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}$ ist symmetrisch.

Die Berechnung der Eigenvektoren, von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$ wie bei Aufgabe 17.5:

$$\begin{vmatrix}16-\lambda&12\\12&9-\lambda\end{vmatrix}=(16-\lambda)(9-\lambda)-144=144-25\lambda+\lambda^2-144=\lambda^2-25\lambda=0,\ \lambda_1=25,\ \lambda_2=0$$

EV zu $\lambda_1=25$:

$$\begin{array}{rr}-9&12\\12&16\\\hline -3&4\\0&0\end{array}\quad \text{EV}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \text{normiert}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2=0$:

$$\begin{array}{rr}16&12\\12&9\\\hline 4&3\\0&0\end{array}\quad \text{EV}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix},\ \text{normiert}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}^\mathsf{T}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100&0\\75&0\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}625&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&0\end{pmatrix}:\end{aligned}$$

Diagonalmatrix aus λ_1,λ_2, war also vorher schon klar!

Substitution: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$, $(x\ \ y)=(\xi\ \ \eta)\,\boldsymbol{V}^\mathsf{T}$

$$(\xi\ \ \eta)\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+(20\ \ 140)\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+500=0$$

$$(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+(4 \quad 28)\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+500=0$$

$$(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+(100 \quad 100)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+500=0$$

$25\xi^2+100\xi+100\eta+500=0,\quad \xi^2+4\xi+4\eta+20=0,$ Parabel

Scheitelpunktermittlung durch quadratische Ergänzung:

$(\xi+2)^2-4+4\eta+20=0,\quad 4(\eta+4)=-(\xi+2)^2,\quad \eta+4=-\frac{1}{4}(\xi+2)^2,$ Scheitel $\xi=-2,\ \eta=-4$

Für die für die Koordinatentransformation verwendete orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$ gilt $\det\boldsymbol{V}=1$, so dass eine Drehung realisiert wurde, vgl. Aufgaben 17.5 und 17.6.

$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ gilt für $\alpha=\arccos\frac{4}{5}\approx 36.87°$, da α wegen $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ im I. Quadranten liegt. Folglich entsteht das ξ-η-System aus dem x-y-System durch eine Drehung um ca. 36.87°.