Aufgabe 17.11

Im kartesischen Koordinatensystem (x,y) der Ebene sei die Gerade $y=4x+\frac{22}{13}$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Gerade in dem Koordinatensystem (ξ,η), das aus dem System (x,y) durch Verschiebung des Koordinatenurprungs in den Punkt $(x,y)=\left(-\frac{27}{13},\frac{20}{13}\right)$ und Drehung um den Winkel $\arctan\frac{12}{5}$ in positive Richtung hervorgeht!

Hinweis: Die Verwendung der Zahlen 13, 12 und 5 soll die Rechnung zahlenmäßig vereinfachen. Warum ist das so?

Lösung:

Die Transformationsmatrix für die Drehung lautet $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$. Für $\varphi=\arctan\frac{12}{5}$ erhält man mit dem Taschenrechner $\sin\varphi\approx 0{,}92307$, $\cos\varphi\approx 0{,}38461$. Man kann die Werte der Winkelfunktionen aber auch rechnerisch ermitteln:

$\varphi=\arctan\frac{12}{5}$, $\frac{12}{5}=\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$, $\sin^2\varphi=\frac{144}{25}(1-\sin^2\varphi)$, $\sin\varphi=\frac{12}{13}$,
$\cos\varphi=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

Bei der Rechnung wurde hinsichtlich des Vorzeichens von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ berücksichtigt, dass $\varphi=\arctan 2{,}4$ im I. Quadranten liegt. Da der Tangens das Verhältnis von Sinus und Kosinus ist, stehen Sinus und Kosinus des Winkels im Verhältnis $12:5$. Durch die Verwendung pythagoreischer Zahlen ($5^2+12^2=13^2$, analog $3^2+4^2=5^2$) wird die Rechnung erleichtert.

Zusammen mit der Verschiebung gilt für die Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & -12\\ 12 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-27\\ 20\end{pmatrix}.$$

Es ist also $x=\frac{1}{13}(5\xi-12\eta-27)$ und $y=\frac{1}{13}(12\xi+5\eta+20)$.

Setzt man dies in die Geradengleichung $y=4x+\frac{22}{13}$ ein und multipliziert zur Vereinfachung die Gleichung mit 13, so erhält man
$12\xi+5\eta+20=4(5\xi-12\eta-27)+22$, $12\xi+5\eta+20=20\xi-48\eta-108+22$, $53\eta=8\xi-106$
und damit die gesuchte Geradengleichung $\eta=\frac{8}{53}\xi-2$.