Aufgabe 17.8

Notieren Sie die Transformationsgleichungen für die Drehung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems um den Winkel α in positive Richtung sowie für die Rücktransformation (Drehung um den Winkel α in negative Richtung)! Was passiert, wenn man diese ineinander einsetzt?

Lösung:

Drehung um α: $\quad \vec{x} = \boldsymbol{P}\vec{\xi}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

Drehung um $-\alpha$: $\vec{\xi} = \boldsymbol{P}^{-1}\vec{x}: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{P}\vec{\xi} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\vec{x} = \vec{x},$$

also tatsächlich $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

Offensichtlich ist $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}$, d.h., die Drehmatrix ist eine orthogonale Matrix.