Aufgabe 17.6

Beweisen Sie, dass sich jede orthogonale zweireihige Matrix in der Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$ darstellen lässt! Welche Folgerung ergibt sich daraus für Koordinatentransformationen mit orthogonalen Matrizen?

Lösung:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Wegen der Orthogonalität von $\boldsymbol{A}$ gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{cases} (1) & a^2+b^2 = a^2+c^2 = b^2+d^2 = c^2+d^2 = 1 \\ (2) & ac+bd = ab+cd = 0 \end{cases}$$

Aus (1) folgt $b^2 = c^2, d^2 = a^2 => d = \pm a$.

Aus (2) folgt $bd = -ac => \begin{cases} a \neq 0 & => c = \mp b \\ a = 0 & \text{Dann gilt dennoch wegen } (1)\ c^2 = b^2 => b = \mp c. \end{cases}$

Also gilt $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & \mp c \\ c & \pm a \end{pmatrix}$ und $a^2+c^2 = 1$.

Da $-1 \le a \le 1$ kann $a = \cos\alpha$ gesetzt werden. Dann ist $c = \pm\sin\alpha$, wobei der Fall $a = \cos\alpha$, $c = -\sin\alpha$ zurückgeführt werden kann auf $a = \cos(-\alpha)$, $c = \sin(-\alpha)$. Somit gilt $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Der Fall $\begin{matrix} x = \cos\alpha * \xi - \sin\alpha * \eta \\ y = \sin\alpha * \xi + \cos\alpha * \eta \end{matrix}$ entspricht einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α in positiver Drehrichtung, s. Aufgabe 17.5. In diesem Fall ist $\det\boldsymbol{A} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Im Fall $\begin{matrix} x = \cos\alpha * \xi + \sin\alpha * \eta \\ y = \sin\alpha * \xi - \cos\alpha * \eta \end{matrix}$ kommt eine Klappung um die ξ-Achse (Änderung der Orientierung) hinzu, in diesem Fall ist $\det\boldsymbol{A} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$.

Also bedeutet eine Koordinatentransformation mit einer orthogonalen Matrix eine Drehung und ggf. Klappung des Koordinatensystems.

(Dass die Determinante einer orthogonalen Matrix gleich ± 1 sein muss, wird auch in Aufgabe 6.198 gezeigt.)