Aufgabe 16.30

Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{pmatrix}$!

Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 6.45b)) verwendet.

Lösung:

Die betrachtete Matrix ist symmetrisch. Folglich sind alle Eigenwerte reell und zu jedem Eigenwert gehören linear unabhängige Eigenvektoren entsprechend seiner Vielfachheit, d.h. die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts ist gleich seiner arithmetische Vielfachheit. Ferner sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 5 \\ -2 & 4-\lambda & -10 \\ 5 & -10 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(25-\lambda)+100+100-25(4-\lambda)-100(1-\lambda)-4(25-\lambda)$$

$$= (4-5\lambda+\lambda^2)(25-\lambda)+200-300+129\lambda = 100-125\lambda+25\lambda^2-4\lambda+5\lambda^2-\lambda^3-100+129\lambda$$

$= -\lambda^3+30\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-30) = 0,\quad$ Eigenwerte: $\lambda_{1/2}=0$ (doppelter EW), $\lambda_3=30$

Für EW $\lambda_{1/2}=0$:

$$\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \\ \hline 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad x = 2y-5z,\ \vec{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die linear unabhängigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind nicht orthogonal. Wir nehmen deshalb $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und suchen einen dazu orthogonalen Eigenvektor $\vec{x}_2$ in der Form $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann muss $\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -10-5\lambda = 0$, also $\lambda = -2$ gelten.

Damit ergibt sich $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als zu $\vec{x}_1$ orthogonaler Eigenvektor.

Für EW $\lambda_3=30$:

$$\begin{array}{rrr} -29 & -2 & 5 \\ -2 & -26 & -10 \\ 5 & -10 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ -1 & -13 & -5 \\ -29 & -2 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -15 & -6 \\ 0 & -60 & -24 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \qquad \text{EV} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Orthonormierte EV sind dann $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ zu 0 und $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ zu 30.

Die Matrix aus diesen drei Vektoren ist orthogonal.

Orthogonale Matrix aus orthonormierten EV: $\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & 1\\ \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & -2\\ 0 & \sqrt{5} & 5\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0\\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & 4 & -10\\ 5 & -10 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & 1\\ \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & -2\\ 0 & \sqrt{5} & 5\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0\\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 30\\ 0 & 0 & -60\\ 0 & 0 & 150\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 30\end{pmatrix}$$