Aufgabe 16.29

Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 6.45b)) verwendet.

Lösung:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+1+1+\lambda+\lambda+\lambda = -\lambda^3+3\lambda+2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad (\lambda^3-3\lambda-2):(\lambda+1) = \lambda^2-\lambda-2$$

$$\begin{array}{l} \lambda^3+\lambda^2 \\ \hline -\lambda^2-3\lambda-2 \\ -\lambda^2-\lambda \\ \hline -2\lambda-2 \end{array}$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} = -1;\ 2$$

Eigenvektoren

zu $\lambda_{1/2}=-1$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$a+b+c=0,\ a=-b-c$

zwei linear unabhängige EV $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_3=2$:

$$\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$a-c=0,\ b-c=0,\ a=b=c$

EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die betrachtete Matrix $\boldsymbol{A}$ ist symmetrisch. Folglich sind alle Eigenwerte reell und zu jedem Eigenwert gehören linear unabhängige Eigenvektoren entsprechend seiner Vielfachheit, d.h. die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts ist gleich seiner arithmetischen Vielfachheit. Ferner sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal, hier:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Eigenvektoren zu mehrfachen Eigenwerten können auch untereinander orthogonalisiert werden. Konkret sind die angegebenen Eigenvektoren zu $\lambda{=}-1$ nicht orthogonal: $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=1\neq 0$. Sie sollen noch orthogonalisiert werden.

Hierzu kann einer der Eigenvektoren unverändert gelassen und die orthogonale Komponente des anderen zu diesem Eigenvektor bestimmt werden, s. z.B. Aufgabe 6.45b).

Wir lassen den Eigenvektor $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ unverändert. Die Projektion des zweiten Eigenvektors $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ auf diesen Vektor ist $\dfrac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, die orthogonale Komponente folglich

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\,\widehat{=}\,\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

(Vielfache von Eigenvektoren sind wieder Eigenvektoren, die Richtung ändert sich durch die Multiplikation mit einem Skalar nicht.)

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ sind orthogonale Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda=-1$.

Damit liegen liegen 3 orthogonale Eigenvektoren zu der Matrix $\boldsymbol{A}$ vor. Diese müssen nun noch normiert werden, dies erreicht man, indem man sie durch ihre eigene Länge dividiert.

Orthonormierte Eigenvektoren sind somit $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}}_{\text{zu }\lambda_{1/2}=-1},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{zu }\lambda_3=2}.$

Die drei orthonormierten Eigenvektoren bilden zusammen die orthogonale Matrix

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\0&2&\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\-1&-1&2\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\0&2&\sqrt{2}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\-1&-1&2\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&2\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&2\sqrt{2}\\0&-2&2\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\0&0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$