Aufgabe 16.28

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung der Matrix rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 6.45b)) verwendet.

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (2-\lambda)^2(5-\lambda)+4+4-4(2-\lambda)-4(2-\lambda)-(5-\lambda) \\ &= (\lambda^2-4\lambda+4)(5-\lambda)+8-16+8\lambda-5+\lambda \\ &= 5\lambda^2-20\lambda+20-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-13+9\lambda = -\lambda^3+9\lambda^2-15\lambda+7=0 \end{aligned}$$

Offensichtlich lautet ein Eigenwert $\lambda_1=1$.

$$(\lambda^3-9\lambda^2+15\lambda-7):(\lambda-1)=\lambda^2-8\lambda+7, \quad \lambda_{2/3}=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm3=\begin{cases}1\\7\end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \lambda^3-\lambda^2 \\ \hline \quad -8\lambda^2+15\lambda-7 \\ \quad \underline{-8\lambda^2+8\lambda} \\ \qquad\qquad 7\lambda-7 \\ \qquad\qquad \underline{7\lambda-7} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

EV zu $\lambda_{1/2}=1$:

$$\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad x_1-x_2+2x_3=0, \;\; x_1=x_2-2x_3$$

EV: $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+D\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

(Zu dem doppelten Eigenwert gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Reelle symmetrische Matrizen haben immer n linear unabhängige Eigenvektoren, so dass es zu jedem Eigenwert linear unabhängige Eigenvektoren entsprechend seiner Vielfachheit gibt.)

Linear unabhängige Eigenvektoren sind z.B. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. Für die orthogonale Maxtrix werden aber orthogonale Eigenvektoren benötigt. Z.B. können der erste Vektor und die zu diesem orthogonale Komponente des zweiten Vektors verwendet werden. Dazu ist vom zweiten Vektor seine Projektion auf den ersten Vektor abzuziehen, vgl. Aufgabe 6.45b):

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\underbrace{t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{Projektion}}\right)}_{\text{orth. Komponente}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=-2-2t=0, \quad t=-1, \quad \text{orthogonale EV: } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Nach Normierung erhält man die orthonormalen Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

EV zu $\lambda_3 = 7$:

$$\begin{array}{rrr} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \\ -5 & -1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \qquad \text{EV} \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Orthogonale Matrix aus orthonormierten EV: $\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 7\\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -7\\ 0 & \sqrt{2} & 14\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Selbstverständlich ist es auch möglich, statt der Matrix aus den orthonormierten Eigenvektoren die aus den nicht orthogonaliserten linear unabhängigen Eigenvektoren gebildete Matrix $\widetilde{\boldsymbol{V}} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ zu verwenden. Allerdings ist diese nicht orthogonal, ihre transponierte ist nicht gleich der inversen Matrix. Deshalb ist in diesem Falle zunächst $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{-1}$ auszurechnen und dann mit $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{V}}$ die Diagonalisierung auszuführen.