Aufgabe 16.27

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$!

b) Bilden Sie aus den normierten Eigenvektoren eine Matrix $\boldsymbol{V}$, überzeugen Sie sich von ihrer Orthogonalität und führen Sie mit ihr die Diagonalisierung aus!

Lösung:

a) $\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(5-\lambda)-4 = 40-13\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2-13\lambda+36 = 0,$

$$\lambda_{1/2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

EV zu $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ \hline -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \text{EV} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{array}{rr} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \text{EV} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Satz: Für reelle symmetrische Matrizen ist die aus den **normierten** EV gebildete Matrix $\boldsymbol{V}$ orthogonal: $\boldsymbol{V}^\mathsf{T} = \boldsymbol{V}^{-1}$, d.h. $\boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$ ist Diagonalmatrix aus Eigenwerten.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch, die Orthogonalität der bei a) zu den beiden verschiedenen Eigenwerten angegebenen Eigenvektoren ist offensichtlich: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$

Um eine orthogonale Matrix zu bilden, müssen die Eigenvektoren jedoch noch normiert werden (die Norm 1 bekommen). Dazu werden sie durch ihre eigene Länge dividiert, diese ist hier jeweils $\sqrt{5}$. Normierte Eigenvektoren sind deshalb $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(Beide Vektoren könnten auch mit -1 multipliziert werden.)

Somit gilt $\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}^\mathsf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix $\boldsymbol{V}$ ist tatsächlich orthogonal, denn es ist $\boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{V} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$ und damit $\boldsymbol{V}^\mathsf{T} = \boldsymbol{V}^{-1}$.

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$