

Aufgabe 16.25

Untersuchen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ auf Definitheit!

Lösung:

Untersuchung mit Eigenwerten:

Entwicklung der Determinante $2 \times$ nach Element rechts unten:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2((\lambda+2)^2-1) \\ = (\lambda+2)^2(\lambda^2+4\lambda+3) = 0, \quad \lambda_{1/2} = -2, \quad \lambda_{3/4} = -2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Alle Eigenwerte < 0 , also negativ definit.

Untersuchung mit Kriterium von Sylvester:

$$-2 < 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6 < 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-6) = 12 > 0$$

Die Hauptminoren haben alternierendes Vorzeichen, mit $-$ beginnend, also negativ definit.