## Aufgabe 16.24

Sei $a$ ein beliebiger reeller Parameter. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 10 & a \\ a & 10 \end{pmatrix}$ ! Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal? Sind die Matrizen definit?

**Lösung:**

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & a \\ a & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(10-\lambda)-a^2 = \lambda^2-20\lambda+100-a^2 = 0,$$
$$\lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100-100+a^2} = 10 \pm |a| = 10 \pm a$$

Ist $\underline{a \neq 0}$, so liegen zwei voneinander verschiedene reelle Eigenwerte vor.

EV zu EW $\lambda_1 = 10+a$:

$$\begin{array}{rr} -a & a \\ a & -a \\ \hline 1 & -1 \end{array}$$
$x_1 - x_2 = 0$
EV $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2 = 10-a$:

$$\begin{array}{rr} a & a \\ a & a \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$
$x_1 + x_2 = 0$
EV $C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist symmetrisch, also sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Ist $\underline{a = 0}$, so liegt der doppelte reelle Eigenwert $\lambda_{1/2} = 10$ vor.

EV zu EW $\lambda_{1/2} = 10$:
$$\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$
$0x_1 + 0x_2 = 0$, $x_1, x_2$ beliebig, also sind alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ EV

Die Menge aller EV lässt sich damit als lineare Hülle von 2 beliebigen linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ beschreiben. Diese sind i.A. nicht orthogonal, man kann aber zweckmäßigerweise speziell orthogonale Vektoren auswählen. Die EV zu $\lambda_{1/2} = 10$ lassen sich z.B. durch $C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder wie oben durch $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ angeben.

Eine reelle symmetrische Matrix heißt

| | | |
|---|---|---|
| positiv definit, | wenn | $(\boldsymbol{A}\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$. |
| positiv semidefinit, | | $\geq 0$ |
| negativ definit, | | $< 0$ |
| negativ semidefint, | | $\leq 0$ |
| indefinit, | | wenn es sowohl $\vec{x}$ mit $(\boldsymbol{A}\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0$ als auch $\vec{x}$ mit $(\boldsymbol{A}\vec{x}) \cdot \vec{x} < 0$ gibt. |

Definitheit wird z.B. benötigt bei Extremwertuntersuchungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Untersuchung mit Eigenwerten:

| | |
|---|---|
| alle EW $> 0$: | positiv definit, |
| alle EW $\geq 0$: | positiv semidefinit, |
| alle EW $< 0$: | negativ definit, |
| alle EW $\leq 0$: | negativ semidefinit, |
| EW unterschiedl. Vz.: | indefinit. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Konkret sind für | $\lvert a\rvert < 10$ | beide EW $10 \pm a > 0$: | Matrix positiv definit, |
| | $\lvert a\rvert = 10$ | EW 20 und 0: | Matrix positiv semidefinit, |
| | $\lvert a\rvert > 10$ | EW $10 \pm a$ unterschiedl. Vz.: | Matrix indefinit. |

Definitheitsuntersuchung mit Kriterium von Sylvester (auch als Kriterium von Hurwitz oder als Kriterium von Jacobi bekannt):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

alle Hauptunterdeterminanten („Hauptminoren“) $> 0$
$\Longleftrightarrow$ positiv definit

Hauptminoren alternierendes Vz., mit $-$ beginnend
$\Longleftrightarrow$ negativ definit

Ist ein Hauptminor gerader Ordnung negativ und/oder gibt es Hauptminoren ungerader Ordnung mit entgegengesetztem Vorzeichen, so ist die Matrix indefinit. (Es gibt auch indefinite Matrizen, für die diese Bedingung nicht erfüllt ist.)

Für $\begin{pmatrix} 10 & a \\ a & 10 \end{pmatrix}$ ergeben sich als Hauptminoren 10 und $\begin{vmatrix} 10 & a \\ a & 10 \end{vmatrix} = 10 - a^2$.

Für $\lvert a\rvert < 10$ sind beide Hauptminoren positiv, so dass positive Definitheit vorliegt. Für $\lvert a\rvert = 10$ ergibt sich aus dem gerade formulierten Kriterium nur, dass die Matrix weder positiv noch negativ definit ist. Für $\lvert a\rvert < 10$ liegt wegen der Negativität des 2. Hauptminors Indefinitheit vor.